Corrigé de l'examen d'Optimisation Non Linéaire

ENAC – 9 juin 2005

1 Exercice : Théorème de la dualité *(12 points)*

1.1 Résolution graphique *(3 points)*

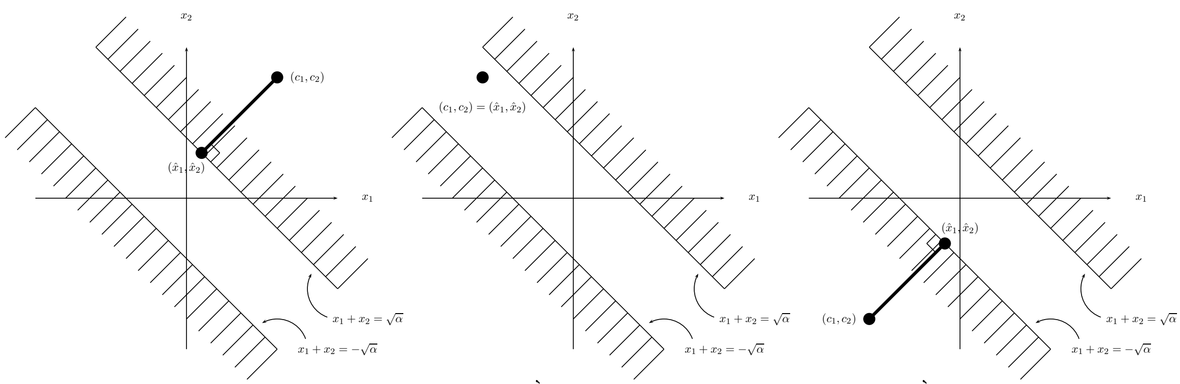
Dans le cas $n = p = 2$:

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{x\in\Omega} \, (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 \qquad \text{où} \quad \Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x_1 + x_2)^2 \leqslant \alpha \right\}$$

Ω est un domaine compris entre deux droites :

$$x \in \Omega \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leqslant \sqrt{\alpha} \\ \textit{ou} \\ x_1 + x_2 \geqslant -\sqrt{\alpha} \end{array} \right.$$

Il s'agit donc de trouver le point du domaine Ω situé à une distance minimale du point (c_1, c_2). Les trois cas sont :



1^{er} cas $\qquad$ $2^{\text{ème}}$ cas $\qquad$ $3^{\text{ème}}$ cas

- 1^{er} cas : $c_1 + c_2 > \sqrt{\alpha}$
  Le point de Ω le plus proche du point (c_1, c_2) est la projection orthogonale sur la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $x_1 + x_2 = \sqrt{\alpha}$
  La droite perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}_1$ et passant par le point (c_1, c_2) a pour équation : $x_1 - x_2 = c_1 - c_2$. Le point solution vérifie donc le système d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = \sqrt{\alpha} \\ x_1 - x_2 = c_1 - c_2 \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{c_1 - c_2 + \sqrt{\alpha}}{2} \\ x_2 = \dfrac{c_2 - c_1 + \sqrt{\alpha}}{2} \end{array} \right.$$

- 2$^{\text{ème}}$ cas : le point (c_1, c_2) est dans le domaine Ω donc la plus courte distance à ce point est lui-même
- 3$^{\text{ème}}$ cas : $c_1 + c_2 < -\sqrt{\alpha}$
  Le point de Ω le plus proche du point (c_1, c_2) est la projection orthogonale sur la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $x_1 + x_2 = -\sqrt{\alpha}$
  La droite perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}_2$ et passant par le point (c_1, c_2) a pour équation : $x_1 - x_2 = c_1 - c_2$. Le point solution vérifie donc le système d'équation :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\sqrt{\alpha} \\ x_1 - x_2 = c_1 - c_2 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{c_1 - c_2 - \sqrt{\alpha}}{2} \\ x_2 = \dfrac{c_2 - c_1 - \sqrt{\alpha}}{2} \end{array}\right.$$

1.2 Positivité de la matrice M *(1,5 points)*

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n \ , \ v^T M v = v^T \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} v_i \end{bmatrix} = v_1 \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) + \cdots + v_n \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2 \geqslant 0$$

La matrice M est donc positive (mais elle n'est pas définie positive puisque l'inégalité précédente n'est pas stricte).
Autre démonstration :
M est de rang 1 donc elle a $n-1$ valeurs propres nulles. Comme sa trace vaut n, on en déduit que sa dernière valeur propre est n. Toutes ses valeurs propres sont donc positives si bien que M est positive.

1.3 Condition suffisante d'application du théorème de la dualité *(1,5 points)*

Une condition suffisante d'application du théorème de la dualité est que la fonction à minimiser f et la fonction h représentant la contrainte (il n'y en a qu'une ici) soient toutes les deux convexes. Pour vérifier ceci, nous devons dériver deux fois f et h avec :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^p \end{array} \qquad \text{et} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^p - \alpha \end{array}$$

Dérivons f :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \ , \ \frac{\partial f}{\partial x}(x) = \left[p\,(x_1 - c_1)^{p-1} \quad \cdots \quad p\,(x_n - c_n)^{p-1}\right]$$

Donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = \begin{bmatrix} p(p-1)\,(x_1 - c_1)^{p-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p(p-1)\,(x_n - c_n)^{p-2} \end{bmatrix}$$

La hessienne de f est positive si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \ , \forall\, v \in \mathbb{R}^n \ , \ v^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) v = p(p-1) \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^{p-2}\, v_i^2 \geqslant 0$$

Ceci est vérifié si p est pair, puisque dans ce cas là : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $(x_i - c_i) \geqslant 0$.
Dérivons h :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ , \ \frac{\partial h}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} p\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{p-1} & \cdots & p\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{p-1} \end{bmatrix} = p\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{p-1} [1 \cdots 1]$$

Donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \ , \ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x) = p(p-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{p-2} M$$

Comme la matrice M est positive, il suffit que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{p-2}$ soit positif pour tout x afin que la hessienne de h soit positive, ce qui est vérifié si p est pair.
Une condition suffisante pour que le problème $(\mathcal{P})$ puisse être résolu avec le théorème de la dualité est donc que p soit pair.

1.4 Résolution du problème $(\mathcal{P})$ par le théorème de la dualité dans le cas général ($(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $p \geqslant 2$) *(6 points)*

- Convexité de f et h :
  D'après la question précédente, on se place dans le cas où p est pair. Dans ce cas, f et h sont convexes.
- Qualification de la contrainte h :
  h est convexe. De plus, $h(0) = -\alpha < 0$ donc $\mathrm{int}(\Omega) \neq \emptyset$. Ainsi, d'après le lemme de qualification, la contrainte h est qualifiée sur $\mathbb{R}^n$.

Par conséquent, d'après le théorème de la dualité, $\hat{x}$ est solution du problème primal $(\mathcal{P})$ si et seulement s'il existe $\hat{\mu} \geqslant 0$ tel que $(\hat{x}, \hat{\mu})$ est solution du problème dual :

$$(Dual) \qquad \sup_{\mu \geqslant 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x,\mu)$$

Soit $\mu \geqslant 0$.
Soit $\zeta_\mu : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & L(x,\mu) = f(x) + \mu h(x) \end{array}$
La première étape consiste à minimiser la fonction ζ_μ sans contraintes.
Soit $\hat{x}$ minimisant ζ_μ. Alors :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n \ , \ \frac{\partial L}{\partial x_i}(\hat{x},\mu) = p\,(\hat{x}_i - c_i)^{p-1} + \mu p \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j\right)^{p-1} = 0$$

$$\Longrightarrow \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n \ , \ (\hat{x}_i - c_i)^{p-1} = -\mu \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j\right)^{p-1}$$

$$\Longrightarrow \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n \ , \ \hat{x}_i - c_i = -\mu^{\frac{1}{p-1}} \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \quad [p-1 \text{ est impair}] \quad \text{(i)}$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j - \sum_{j=1}^{n} c_j = -n\mu^{\frac{1}{p-1}} \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j$$

$$\Longrightarrow \left(1 + n\mu^{\frac{1}{p-1}}\right) \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j$$

Or $\mu \geqslant 0$ donc $1 + n\mu^{\frac{1}{p-1}} \geqslant 1 > 0$. Ainsi :

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j}{1 + n\mu^{\frac{1}{p-1}}} \quad \text{(ii)}$$

D'où, d'après les équations (i) et (ii) :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n \ ,\ \hat{x}_i = c_i - \mu^{\frac{1}{p-1}} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j}{1 + n\mu^{\frac{1}{p-1}}}$$

Donc : $$\boxed{\hat{x}(\mu) = c - \mu^{\frac{1}{p-1}} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j}{1 + n\mu^{\frac{1}{p-1}}} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}} \qquad \text{avec } c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$\hat{x}(\mu)$ est bien le miminum de ζ_μ sur $\mathbb{R}^n$ car ζ_μ est convexe.

La deuxième étape consiste à maximiser le langrangien par rapport à μ positif en prenant $x = \hat{x}(\mu)$ précédemment calculé.

Soit $\psi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mu & \longmapsto & \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \mu) = L(\hat{x}(\mu), \mu) = f(\hat{x}(\mu)) + \mu h(\hat{x}(\mu)) \end{array}$

ψ est une fonction à une seule variable donc le calcul de son maximum sur $\mathbb{R}_+$ ne nécessite pas d'utiliser les théorèmes du Lagrangien. Une simple étude de son sens de variation suffit.

La fontion $\hat{x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \mu & \longmapsto & \hat{x}(\mu) \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\psi = (f \circ \hat{x}) + (\cdot h \circ \hat{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \forall\, \psi \in \mathbb{R}_+ \ ,\ \psi'(\mu) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(\mu)) \cdot \frac{\partial \hat{x}}{\partial \mu}(\mu) + h(\hat{x}(\mu)) + \mu \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}(\mu)) \cdot \frac{\partial \hat{x}}{\partial \mu}(\mu) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(\mu)) + \mu \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}(\mu)) \right) \cdot \frac{\partial \hat{x}}{\partial \mu}(\mu) + h(\hat{x}(\mu)) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x}(\hat{x}(\mu), \mu) \cdot \frac{\partial \hat{x}}{\partial \mu}(\mu) + h(\hat{x}(\mu)) \end{aligned}$$

Or, d'après le calcul de $\hat{x}(\mu)$, $\dfrac{\partial L}{\partial x}(\hat{x}(\mu), \mu) = 0$ donc :

$$\forall\, \psi \in \mathbb{R}_+ \ ,\ \psi'(\mu) = h(\hat{x}(\mu))$$

Montrons d'emblée que ψ est concave sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \forall\, \mu \in \mathbb{R}_+ \ ,\ \psi''(\mu) &= -p \left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j}{1 + n\mu^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{p-1} \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{n \frac{1}{p-1} \mu^{\frac{2-p}{p-1}}}{\left(1 + n\mu^{\frac{1}{p-1}}\right)^2} \\ &= \underbrace{-\frac{np}{p-1} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \right)^p}_{\leqslant 0 \text{ car } p \text{ est pair}} \underbrace{\frac{\mu^{\frac{2-p}{p-1}}}{\left(1 + n\mu^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p+1}}}_{\geqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+} \leqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Donc ψ est concave sur $\mathbb{R}_+$ donc il ne reste plus qu'à calculer le point $\tilde{\mu}$ où la dérivée de ψ s'annule :

$$\begin{aligned}
\psi'(\tilde{\mu}) = 0 &\iff h\left(\hat{x}(\tilde{\mu})\right) = 0 \\
&\iff \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i(\tilde{\mu})\right)^p - \alpha = 0 \\
&\iff \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{1 + n\tilde{\mu}^{\frac{1}{p-1}}}\right)^p = \alpha \qquad \text{d'après (ii)} \\
&\iff \tilde{\mu}^{\frac{1}{p-1}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j \mp \alpha^{\frac{1}{p}}}{\pm n\alpha^{\frac{1}{p}}} \qquad [p \text{ est pair}]
\end{aligned}$$

ψ' s'annule donc en deux points *possibles* sur $\mathbb{R}_+$: $\tilde{\mu}_1^{\frac{1}{p-1}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_j - \alpha^{\frac{1}{p}}}{n\alpha^{\frac{1}{p}}}$ et $\tilde{\mu}_2^{\frac{1}{p-1}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_j + \alpha^{\frac{1}{p}}}{-n\alpha^{\frac{1}{p}}}$.
Raisonnons de la même manière que dans le cas simple $n = p = 2$ étudié au début de l'exercice :

- <u>1^er cas</u> : $\sum_{j=1}^{n} c_j \geqslant \alpha^{\frac{1}{p}}$

  Dans ce cas, $\tilde{\mu}_1^{\frac{1}{p-1}} \geqslant 0$ et $\tilde{\mu}_2^{\frac{1}{p-1}} < 0$ car $\alpha > 0$. Comme $p-1$ est impair, $\tilde{\mu}_1 \geqslant 0$ et $\tilde{\mu}_2 < 0$. ψ' ne s'annule donc qu'en $\tilde{\mu}_1$ sur $\mathbb{R}_+$, et comme ψ est concave sur $\mathbb{R}_+$, elle atteint son maximum en $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_1 = \left(\dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_j - \alpha^{\frac{1}{p}}}{n\alpha^{\frac{1}{p}}}\right)^{p-1}$.
- <u>2^ème cas</u> : $\sum_{j=1}^{n} c_j \leqslant -\alpha^{\frac{1}{p}}$

  Dans ce cas, $\tilde{\mu}_1^{\frac{1}{p-1}} < 0$ et $\tilde{\mu}_2^{\frac{1}{p-1}} \geqslant 0$ car $\alpha > 0$. Comme $p-1$ est impair, $\tilde{\mu}_1 < 0$ et $\tilde{\mu}_2 \geqslant 0$. ψ' ne s'annule donc qu'en $\tilde{\mu}_2$ sur $\mathbb{R}_+$, et comme ψ est concave sur $\mathbb{R}_+$, elle atteint son maximum en $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_2 = -\left(\dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_j + \alpha^{\frac{1}{p}}}{n\alpha^{\frac{1}{p}}}\right)^{p-1}$ ($p-1$ est impair).
- <u>3^ème cas</u> : $-\alpha^{\frac{1}{p}} < \sum_{j=1}^{n} c_j < \alpha^{\frac{1}{p}}$

  Dans ce cas, $\tilde{\mu}_1^{\frac{1}{p-1}} < 0$ et $\tilde{\mu}_2^{\frac{1}{p-1}} < 0$. Comme $p-1$ est impair, $\tilde{\mu}_1 < 0$ et $\tilde{\mu}_2 < 0$. ψ' ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}_+$, et comme ψ est concave sur $\mathbb{R}_+$, elle atteint son maximum en $\hat{\mu} = 0$.

La solution générale du problème $(\mathcal{P})$ est donc :

$$\hat{x} = c - \overline{\mu}\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{1+n\overline{\mu}}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \overline{\mu} = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_j - \alpha^{\frac{1}{p}}}{n\alpha^{\frac{1}{p}}} & \text{si } \sum_{j=1}^{n} c_j \geqslant \alpha^{\frac{1}{p}} \\ 0 & \text{si } -\alpha^{\frac{1}{p}} < \sum_{j=1}^{n} c_j < \alpha^{\frac{1}{p}} \\ -\dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_j + \alpha^{\frac{1}{p}}}{n\alpha^{\frac{1}{p}}} & \text{si } \sum_{j=1}^{n} c_j \leqslant -\alpha^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

Vérifions que nous retrouvons bien le résultat de la première question dans le cas $n = p = 2$:

- 1^er^ cas : $c_1 + c_2 \geqslant \sqrt{\alpha}$

$$\overline{\mu}\frac{c_1+c_2}{1+2\overline{\mu}} = \frac{c_1+c_2-\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}\frac{c_1+c_2}{1+2\frac{c_1+c_2-\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}} = \frac{c_1+c_2-\sqrt{\alpha}}{2} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \hat{x}_1 = \dfrac{c_1-c_2+\sqrt{\alpha}}{2} \\ \hat{x}_2 = \dfrac{c_2-c_1+\sqrt{\alpha}}{2} \end{cases}$$

- 2^ème^ cas : $-\sqrt{\alpha} < c_1 + c_2 < \sqrt{\alpha}$

$$\overline{\mu} = 0 \quad \text{donc} \quad \hat{x}_1 = c_1 \text{ et } \hat{x}_2 = c_2$$

- 3^ème^ cas : $c_1 + c_2 \leqslant -\sqrt{\alpha}$

$$\overline{\mu}\frac{c_1+c_2}{1+2\overline{\mu}} = -\frac{c_1+c_2+\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}\frac{c_1+c_2}{1-2\frac{c_1+c_2+\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}} = \frac{c_1+c_2+\sqrt{\alpha}}{2} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \hat{x}_1 = \dfrac{c_1-c_2-\sqrt{\alpha}}{2} \\ \hat{x}_2 = \dfrac{c_2-c_1-\sqrt{\alpha}}{2} \end{cases}$$

Nous retrouvons bien la solution trouvée à la première question de l'exercice.

2 Problème : optimisation de la structure d'un raidisseur en aéronautique *(18 points)*

2.1 Formalisation du problème (P1) *(1 point)*

Le problème consiste à minimiser la masse du raidisseur en I sous les contraintes de géométrie $b \geqslant 0$, $e > 0$, $h > 0$ et sous la contrainte de flambage global $P_{max} \leqslant P_c$. Cette dernière inégalité **ne peut pas** être dans l'autre sens puisque P_{max} est imposé à l'avion par l'environnement alors que P_c est contrôlable via la forme des raidisseurs en I. La forme des raidisseurs en I doit donc permettre à l'avion de supporter au moins la charge maximale imposée par l'environnement.
La masse M d'un raidisseur en I est, en notant ρ la masse volumique (constante) du matériau :

$$M = \rho \times L \times (eh + 2eb)$$

Puisque ρ et L sont constants, minimiser la masse du raidisseur revient à minimiser la surface d'une coupe transversale du raidisseur, soit $(eh + 2eb)$. Le problème d'optimisation (P1) s'écrit donc :

$$(P_1) \qquad \min_{\substack{-b\leqslant 0 \\ e>0 \\ h>0 \\ P_{max}-\frac{\pi^2 E}{L^2}e\frac{h^2}{2}\left(\frac{h}{6}+b\right)\leqslant 0}} \qquad (eh+2eb)$$

2.2 Inconsistence du problème d'optimisation (P1) *(3 points)*

Les contraintes $e > 0$ et $h > 0$ sont strictes si bien qu'elles définissent un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$. Nous ne les prendrons donc pas en compte dans le Lagrangien du problème mais nous vérifierons qu'elles sont toujours satisfaites.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (e,h,b) & \longmapsto & eh + 2eb \end{array}$ la fonction à minimiser.

Soient h_1, et h_2 les contraintes du problème :

$$h_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (e,h,b) & \longmapsto & P_{max} - \dfrac{\pi^2 E}{L^2} e \dfrac{h^2}{2}\left(\dfrac{h}{6}+b\right) \end{array} \qquad \text{et} \qquad h_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (e,h,b) & \longmapsto & -b \end{array}$$

<u>Qualification des contraintes</u>

h_1 et h_2 ne sont pas toutes les deux à la fois convexes, ou bien à la fois affines, si bien que le lemme de qualification ne peut être utilisé que pour montrer que les gradients des contraintes sont indépendants sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \times \mathbb{R}$.

Gradient de h_1 : $\forall\,(e,h,b) \in \mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial h_1}{\partial(e,h,b)}(e,h,b) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\dfrac{h^2}{2}\left(\dfrac{h}{6}+b\right) \\ -\dfrac{\pi^2 E}{L^2} eh\left(\dfrac{h}{4}+b\right) \\ -\dfrac{\pi^2 E}{L^2} e\dfrac{h^2}{2} \end{bmatrix}$

Gradient de h_2 : $\forall\,(e,h,b) \in \mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial h_2}{\partial(e,h,b)}(e,h,b) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

- <u>1^{er} cas</u> : seule h_1 est active
  Comme $e > 0$, $h > 0$ et $b \geqslant 0$, toutes les composantes du gradient de h_1 sont strictement négatives, donc le gradient de h_1 est non nul sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \times \mathbb{R}$.
- <u>2^{ème} cas</u> : seule h_2 est active
  Le gradient de h_2 est non nul sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \times \mathbb{R}$.
- <u>2^{ème} cas</u> : h_1 et h_2 sont toutes les deux actives
  Les gradients de h_1 et h_2 sont linéairements dépendants si et seulement si les deux premières composantes du gradient de h_1 sont nulles, ce qui n'est pas le cas si $e > 0$, $h > 0$ et $b \geqslant 0$. Donc les gradients de h_1 et h_2 sont linéairements indépendants sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \times \mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les contraintes sont qualifiées sur } \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \times \mathbb{R}.}$

<u>Conditions d'optimalité du premier ordre</u>

Soit $(\hat{e},\hat{h},\hat{b})$ solution du problème (P1) sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \times \mathbb{R}$. Les contraintes sont qualifiées sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \times \mathbb{R}$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^2$ tel que :

- $\dfrac{\partial L}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b},\mu) = \dfrac{\partial f}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) + \mu_1 \dfrac{\partial h_1}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) + \mu_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$

  $$\text{Donc : } \begin{cases} \hat{h} + 2\hat{b} - \mu_1 \dfrac{\pi^2 E}{L^2}\dfrac{\hat{h}^2}{2}\left(\dfrac{\hat{h}}{6}+\hat{b}\right) = 0 & (1) \\ \hat{e} - \mu_1 \dfrac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\hat{h}\left(\dfrac{\hat{h}}{4}+\hat{b}\right) = 0 & (2) \\ 2\hat{e} - \mu_1 \dfrac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\dfrac{\hat{h}^2}{2} - \mu_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

- $\mu_1 h_1(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = \mu_1 \left(P_{max} - \frac{\pi^2 E}{L^2} \hat{e} \frac{\hat{h}^2}{2} \left(\frac{\hat{h}}{6} + \hat{b} \right) \right) = 0 \qquad (4)$
- $\mu_2 h_2(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = -\mu_2 \hat{b} = 0 \qquad (5)$

D'après (4) : $\mu_1 = 0$ ou $h_1(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$
Si $\mu_1 = 0$ alors (1) implique $\hat{h} + 2\hat{b} = 0$, ce qui est impossible car $\hat{h} > 0$ et $\hat{b} \geqslant 0$.
Donc $\mu_1 \neq 0$ et $h_1(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$: $P_{max} = \frac{\pi^2 E}{L^2} \hat{e} \frac{\hat{h}^2}{2} \left(\frac{\hat{h}}{6} + \hat{b} \right)$
D'après (5) : $\mu_2 = 0$ ou $h_2(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$
Si $\mu_2 = 0$ alors :

$$(3) \Longrightarrow 2 = \mu_1 \frac{\pi^2 E}{2L^2} \hat{h}^2 \qquad [\hat{e} > 0] \qquad (i)$$

$$\text{or : } \quad (2) \Longrightarrow 1 = \mu_1 \frac{\pi^2 E}{2L^2} \hat{h} \left(\frac{\hat{h}}{2} + 2\hat{b} \right) \qquad [\hat{e} > 0] \qquad (ii)$$

$$(i) - 2(ii) \Longrightarrow 0 = -\mu_1 \frac{\pi^2 E}{L^2} 2\hat{h}\hat{b} \Longrightarrow \hat{b} = 0 \qquad [\mu_1 \neq 0 \text{ et } \hat{h} > 0]$$

Ainsi :

$$(1) \Longrightarrow 1 = \mu_1 \frac{\pi^2 E}{2L^2} \frac{\hat{h}^2}{6} \qquad [\hat{h} > 0] \qquad (iii)$$

$$(ii) \Longrightarrow 1 = \mu_1 \frac{\pi^2 E}{2L^2} \frac{\hat{h}^2}{2} \qquad (iv)$$

$$(iii) - (iv) \Longrightarrow 0 = -\mu_1 \frac{\pi^2 E}{2L^2} \frac{\hat{h}^2}{3}$$

ce qui est impossible car $\mu_1 \neq 0$ et $\hat{h} > 0$.
Donc $\mu_2 \neq 0$ et $h_2(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$: $\hat{b} = 0$, ce qui est également impossible ceci mène aux équations (iii) et (iv) dont nous venons de démontrons qu'elles sont impossibles.
Conclusion : $\boxed{\text{Le problème (P1) n'a pas de solution.}}$
<u>Autre démonstration</u> (qui n'utilise pas le Lalgrangien) :
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \times \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* ,\ u_n = \begin{bmatrix} \frac{e_0}{n} \\ n^{\frac{1}{3}} h_0 \\ n^{\frac{1}{3}} b_0 \end{bmatrix}$$

avec (e_0, h_0, b_0) tel que : $h_1(e_0,h_0,b_0) \leqslant 0$ et $h_2(e_0,h_0,b_0) \leqslant 0$.
Les contraintes sont vérifiées pour tout $n > 1$:

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}^* ,\ h_1(u_n) &= P_{max} - \frac{\pi^2 E}{L^2} \left(\frac{e_0}{n} \frac{(n^{\frac{1}{3}} h_0)^3}{12} + \frac{e_0}{n} \frac{(n^{\frac{1}{3}} h_0)^2}{2} n^{\frac{1}{3}} b_0 \right) \\ &= P_{max} - \frac{\pi^2 E}{L^2} \left(e_0 \frac{h_0^3}{12} + e_0 \frac{h_0^2}{2} b_0 \right) = h_1(e_0,h_0,b_0) \leqslant 0 \end{aligned}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* ,\ h_2(u_n) = -n^{\frac{1}{3}} b_0 \leqslant 0 \qquad \text{car} \qquad h_2(e_0,h_0,b_0) = -b_0 \leqslant 0$$

De plus : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = \frac{e_0\,(h_0 + 2b_0)}{n^{\frac{2}{3}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$
Ainsi, s'il existe une solution $(\hat{e},\hat{h},\hat{b})$ au problème (P1), $f(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) > 0$ donc il est toujours

possible de trouver un entier $p > 1$ tel que $0 < f(u_p) < f(\hat{e}, \hat{h}, \hat{b})$. Donc $(\hat{e}, \hat{h}, \hat{b})$ n'est pas solution, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse initiale. Par conséquent, le problème (P1) n'a pas de solution.

2.3 Résolution du problème (P2) *(5 points)*

Notons h_3 la contrainte qui a été ajoutée au problème (P1) :

$$h_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (e, h, b) & \longmapsto & e_{min} - e \end{array}$$

Calculons son gradient :

$$\forall\, (e, h, b) \in \mathbb{R}^3 \;,\; \frac{\partial h_3}{\partial(e, h, b)}(e, h, b) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La contrainte sur e n'étant plus stricte, l'ensemble *ouvert* auquel doivent appartenir les solutions éventuelles du problème (P2) est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

<u>Qualification des contraintes</u>

- <u>1$^{\text{er}}$ cas</u> : seule h_1 est active
  $h > 0$, $e \geqslant e_{min} > 0$ et $b \geqslant 0$ donc toutes les composantes du gradient de h_1 sont strictements négatives. Donc le gradient de h_1 est non nul sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- <u>2$^{\text{ème}}$ cas</u> : seule h_2 est active
  Le gradient de h_2 est non nul sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- <u>3$^{\text{ème}}$ cas</u> : seule h_3 est active
  Le gradient de h_3 est non nul sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- <u>4$^{\text{ème}}$ cas</u> : seules h_1 et h_2 sont actives
  Les gradients de h_1 et h_2 sont linéairement dépendants si et seulement si les deux premières composantes du gradient de h_1 sont nulles, ce qui n'est pas le cas si $h > 0$, $e \geqslant e_{min} > 0$ et $b \geqslant 0$. Donc les gradients de h_1 et h_2 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- <u>5$^{\text{ème}}$ cas</u> : seules h_1 et h_3 sont actives
  Les gradients de h_1 et h_3 sont linéairement dépendants si et seulement si les deux dernières composantes du gradient de h_1 sont nulles, ce qui n'est pas le cas si $h > 0$, $e \geqslant e_{min} > 0$ et $b \geqslant 0$. Donc les gradients de h_1 et h_3 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- <u>6$^{\text{ème}}$ cas</u> : seules h_2 et h_3 sont actives
  Les gradients de h_2 et h_3 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- <u>7$^{\text{ème}}$ cas</u> : h_1, h_2 et h_3 sont toutes les trois actives
  Les gradients de h_1, h_2 et h_3 sont linéairement dépendants si et seulement si la deuxième composante du gradient de h_1 est nulle, ce qui n'est pas le cas si $h > 0$, $e \geqslant e_{min} > 0$ et $b \geqslant 0$. Donc les gradients de h_1, h_2 et h_3 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les contraintes sont qualifiées sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.}$

<u>Conditions d'optimalité du 1$^{\text{er}}$ ordre</u>
Soit $(\hat{e}, \hat{h}, \hat{b})$ solution du problème d'optimisation (P2) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Les contraintes sont qualifiées sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, donc il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^3$ tel que :

- $\dfrac{\partial L}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b},\mu) = \dfrac{\partial f}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b})+\mu_1\dfrac{\partial h_1}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b})+\mu_2\dfrac{\partial h_2}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b})+\mu_3\dfrac{\partial h_3}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$

  Donc : $\begin{cases} \hat{h}+2\hat{b}-\mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\dfrac{\hat{h}^2}{2}\left(\dfrac{\hat{h}}{6}+\hat{b}\right)-\mu_3 = 0 & (1) \\ \hat{e}-\mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\hat{h}\left(\dfrac{\hat{h}}{4}+\hat{b}\right) = 0 & (2) \\ 2\hat{e}-\mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\dfrac{\hat{h}^2}{2}-\mu_2 = 0 & (3) \end{cases}$
- $\mu_1 h_1(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = \mu_1\left(P_{max}-\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\dfrac{\hat{h}^2}{2}\left(\dfrac{\hat{h}}{6}+\hat{b}\right)\right) = 0 \qquad (4)$
- $\mu_2 h_2(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = -\mu_2\hat{b} = 0 \qquad (5)$
- $\mu_3 h_3(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = \mu_3\left(e_{min}-\hat{e}\right) = 0 \qquad (6)$

D'après (4) : $\mu_1 = 0$ ou $h_1(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$
Si $\mu_1 = 0$ alors (2) implique $\hat{e} = 0$, ce qui est impossible car $\hat{e} \geqslant e_{min} > 0$.
Donc $\mu_1 \neq 0$ et $h_1(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$: $P_{max} = \dfrac{\pi^2 E}{2L^2}\hat{e}\hat{h}^2\left(\dfrac{\hat{h}}{6}+\hat{b}\right)$
D'après (5) : $\mu_2 = 0$ ou $h_2(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$
Si $\mu_2 = 0$ alors :

$$(3) \Longrightarrow 2 = \mu_1\frac{\pi^2 E}{2L^2}\hat{h}^2 \qquad [\hat{e} \geqslant e_{min} > 0] \qquad (i)$$

$$\text{or : } (2) \Longrightarrow 1 = \mu_1\frac{\pi^2 E}{2L^2}\hat{h}\left(\frac{\hat{h}}{2}+2\hat{b}\right) \qquad [\hat{e} \geqslant e_{min} > 0] \qquad (ii)$$

$$(i)-2(ii) \Longrightarrow 0 = -\mu_1\frac{\pi^2 E}{L^2}2\hat{h}\hat{b} \Longrightarrow hatb = 0 \qquad \text{car} \qquad \mu_1 \neq 0 \text{ et } \hat{h} > 0$$

Si $\mu_2 \neq 0$ alors $h_2(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = -\hat{b} = 0$.
Donc, dans tous les cas, $\underline{\hat{b} = 0}$.
D'après (6) : $\mu_3 = 0$ ou $h_3(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$.
Si $\mu_3 = 0$ alors :

$$(1) \Longrightarrow 1 = \mu_1\frac{\pi^2 E}{2L^2}\frac{\hat{h}^2}{6} \qquad [\hat{b} = 0 \text{ et } \hat{h} > 0] \qquad (iii)$$

$$\text{or : } (2) \Longrightarrow 1 = \mu_1\frac{\pi^2 E}{2L^2}\frac{\hat{h}^2}{2} \qquad [\hat{b} = 0 \text{ et } \hat{e} \geqslant e_{min} > 0] \qquad (iv)$$

$$(iii)-(iv) \Longrightarrow 0 = -\mu_1\frac{\pi^2 E}{2L^2}\frac{\hat{h}^2}{3}$$

ce qui est impossible car $\hat{h} > 0$ et $\mu_1 \neq 0$.
Donc $\mu_3 \neq 0$ et $h_3(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = e_{min}-\hat{e} = 0$: $\underline{\hat{e} = e_{min}}$.
Or $h_1(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = P_{max}-\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\dfrac{\hat{h}^2}{2}\left(\dfrac{\hat{h}}{6}+\hat{b}\right) = 0$ avec $\hat{e} = e_{min}$ et $\hat{b} = 0$ donc $\underline{\hat{h} = \left(\dfrac{12P_{max}L^2}{\pi^2 e_{min}E}\right)^{\frac{1}{3}}}$

<u>Conditions d'optimalité du 2$^{\text{ème}}$ ordre</u> (données dans l'énoncé du problème)
Soit $(\hat{e},\hat{h},\hat{b})$ la seule solution *éventuelle* du problème (P2) précédemment trouvée. Soit μ les paramètres de Lagrange correspondants. Les contraintes sont qualifiées en $\hat{e},\hat{h},\hat{b})$ car ce point appartient à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.
D'après les calculs précédents :

- $\dfrac{\partial L}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$
- $\forall 1 \leqslant i \leqslant 3$, $\mu_i h_i(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0$

Il ne reste plus qu'à vérifier que :

$$v^T \frac{\partial^2 L}{\partial(e,h,b)^2}(\hat{e},\hat{h},\hat{b},\mu)v > 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^3_* \text{ tel que}$$

$$\begin{cases} v^T \dfrac{\partial h_i}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = 0 \text{ pour tout } i \in A(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) \text{ tel que } \mu_i > 0 \\ v^T \dfrac{\partial h_i}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) \leqslant 0 \text{ pour tout } i \in A(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) \text{ tel que } \mu_i = 0 \end{cases}$$

Le hessien de L en $\hat{e},\hat{h},\hat{b},\mu)$ vaut :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial(e,h,b)^2}(\hat{e},\hat{h},\hat{b},\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1-\mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\dfrac{\hat{h}^2}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\hat{b}\right) & 2-\mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\dfrac{\hat{h}^2}{2} \\ 1-\mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\dfrac{\hat{h}^2}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\hat{b}\right) & -\mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\dfrac{\hat{e}}{2}\left(\hat{h}+2\hat{b}\right) & -\mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\hat{h} \\ 2-\mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\dfrac{\hat{h}^2}{2} & -\mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\hat{h} & 0 \end{bmatrix}$$

Répertorions les paramètres de Lagrange suivant leur stricte positivé ou leur nullité :

- $\mu_1 \neq 0$ donc $\mu_1 > 0$
- $(3) - 2(2) \Longrightarrow 0 = -\mu_2 + 2\mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\hat{h}\hat{b} = -\mu_2$ car $\hat{b} = 0$
- $3(1) - \dfrac{\hat{h}}{\hat{e}}(2) \quad [\hat{e} \geqslant e_{min} > 0] \Longrightarrow 2\hat{h} + 6\hat{b} - \mu_1\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\dfrac{\hat{h}^2}{2}\hat{b} - 3\mu_3 = 0 \Longrightarrow \mu_3 = \dfrac{2}{3}\hat{h} > 0 \quad [\hat{b} = 0]$

Ainsi, soit $v \in \mathbb{R}^3_*$ tel que :

$$\begin{cases} v^T \dfrac{\partial h_1}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = -\dfrac{\pi^2 E}{L^2}\dfrac{\hat{h}}{2}\left(v_1\hat{h}\left(\dfrac{\hat{h}}{6}+\hat{b}\right) + v_2\hat{e}\left(\dfrac{\hat{h}}{2}+2\hat{b}\right) + v_3\hat{e}\hat{h}\right) = 0 \\ v^T \dfrac{\partial h_2}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = -v_3 \leqslant 0 \\ v^T \dfrac{\partial h_3}{\partial(e,h,b)}(\hat{e},\hat{h},\hat{b}) = -v_1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{v_2}{2} + v_3 = 0 \\ v_3 \geqslant 0 \\ v_1 = 0 \end{cases}$$

car $\hat{b} = 0$, $\hat{e} = e_{min} > 0$ et $\hat{h} > 0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} v^T \frac{\partial^2 L}{\partial(e,h,b)^2}(\hat{e},\hat{h},\hat{b},\mu)v &= -\mu_1\frac{\pi^2 E}{L^2}\frac{\hat{e}}{2}\hat{h}v_2^2 - 2v_2v_3\mu_1\frac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\hat{h} \qquad [\hat{b}=0] \\ &= -\mu_1\frac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\hat{h}\left(\frac{v_2^2}{2} + 2v_2v_3\right) \\ &= -\mu_1\frac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\hat{h}\left(\frac{v_2^2}{2} - v_2^2\right) \qquad \left[\frac{v_2}{2} + v_3 = 0\right] \\ &= \frac{1}{2}\mu_1\frac{\pi^2 E}{L^2}\hat{e}\hat{h}v_2^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

En effet :

- $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_1 \geqslant 0$ donc $\mu_1 > 0$

- $\hat{e} = e_{min} > 0$ et $\hat{h} > 0$
- si $v_3 = 0$ alors $v_2 = 0$ car $\dfrac{v_2}{2} + v_3 = 0$. Comme $v_1 = 0$, on aurait alors $v = 0$, ce qui est exclus par hypothèse. Donc $v_3 \neq 0$.

Ainsi, $(\hat{e}, \hat{h}, \hat{b})$ et μ vérifient toutes les conditions d'optimalité du 2$^{\text{ème}}$ ordre, si bien que $(\hat{e}, \hat{h}, \hat{b})$ est une solution locale stricte du problème (P2). Comme ce point est l'unique solution éventuelle de (P2), on en déduit que $(\hat{e}, \hat{h}, \hat{b})$ est l'unique solution stricte du problème d'optimisation (P2).

Conclusion : $\boxed{\text{La solution (stricte) du problème (P2) est } (\hat{e}, \hat{h}, \hat{b}) = \left(e_{min}, \left(\dfrac{12P_{max}L^2}{\pi^2 e_{min} E}\right)^{\frac{1}{3}}, 0\right)}$

2.4 Condition nécessaire pour qu'il n'y ait pas de flambage local *(2 points)*

Il n'y a pas de flambage local tant que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{P_{max}}{S} \leqslant K\left(\frac{e}{h}\right)^2 \qquad \text{avec} \quad S = eh + 2eb$$

Si cette inégalité est stricte, *d'après le théorème d'optimisation dans un ensemble ouvert*, on peut résoudre le problème (P2) de la même manière qu'à la question précédente en vérifiant que la solution trouvée vérifie cette inégalité :

$$\frac{P_{max}}{\hat{e}\hat{h} + 2\hat{e}\hat{b}} < K\left(\frac{\hat{e}}{\hat{h}}\right)^2 \Longleftrightarrow {P_{max}}^{\frac{4}{3}}\left(\frac{12L^2}{\pi^2 E}\right)^{\frac{1}{3}} < K{e_{min}}^{\frac{10}{3}}$$

Ainsi, en prenant en compte le cas limite correspondant à l'égalité dans l'inégalité précédente, il n'y a pas de flambage local tant que :

$$\boxed{{P_{max}}^4 \frac{12L^2}{\pi^2 E} \leqslant K^3 {e_{min}}^{10}}$$

2.5 Résolution du problème d'optimisation (P3) *(5 points)*

La fonction à minimiser s'écrit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, S_a, S_t) & \longmapsto & eh + 2eb = S_a + 2S_t \end{array}$$

Le problème d'optimisation (P3) n'a plus que deux contraintes non strictes :

– le flambage global :

$$h_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, S_a, S_t) & \longmapsto & \dfrac{e}{h}\left(P_{max} - \dfrac{\pi^2 E}{L^2} e \dfrac{h^2}{2}\left(\dfrac{h}{6} + b\right)\right) = \alpha P_{max} - \dfrac{\pi^2 E}{L^2}\dfrac{S_a}{2}\left(\dfrac{S_a}{6} + S_t\right) \end{array}$$

– le flambage local :

$$h_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, S_a, S_t) & \longmapsto & P_{max} - K(eh + 2eb)\left(\dfrac{e}{h}\right)^2 = P_{max} - K\alpha^2 (S_a + 2S_t) \end{array}$$

Le problème d'optimisation (P3) s'écrit donc :

$$(P3) \qquad \min_{\substack{\alpha P_{max} \leqslant \frac{\pi^2 E}{L^2}\frac{S_a}{2}\left(\frac{S_a}{6} + S_t\right) \\ P_{max} \leqslant K\alpha^2(S_a + 2S_t) \\ \alpha > 0 \\ S_a > 0 \\ S_t > 0}} (S_a + 2S_t)$$

D'après le théorème d'optimisation dans un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$, nous ne prendrons en compte que les contraintes non strictes h_1 et h_2 dans le lagrangien, mais nous ne considérerons que des solutions potentielles dans l'ensemble ouvert ${\mathbb{R}_+^*}^3$.

Qualification des contraintes

Calculons les gradients des contraintes :

$$\text{Gradient de } h_1 : \forall\ (\alpha, S_a, S_t) \in \mathbb{R}^3\ ,\ \frac{\partial h_1}{\partial(\alpha, S_a, S_t)}(\alpha, S_a, S_t) = \begin{bmatrix} P_{max} \\ -\dfrac{\pi^2 E}{2L^2}\left(\dfrac{S_a}{3} + S_t\right) \\ -\dfrac{\pi^2 E}{2L^2} S_a \end{bmatrix}$$

$$\text{Gradient de } h_2 : \forall\ (\alpha, S_a, S_t) \in \mathbb{R}^3\ ,\ \frac{\partial h_2}{\partial(\alpha, S_a, S_t)}(\alpha, S_a, S_t) = \begin{bmatrix} -2K\alpha\,(S_a + 2S_t) \\ -K\alpha^2 \\ -2K\alpha^2 \end{bmatrix}$$

- 1^er cas : seule la contrainte h_1 est active
  $P_{max} > 0$ donc le gradient de h_1 est non nul sur ${\mathbb{R}_+^*}^3$.
- 2^ème cas : seule la contrainte h_2 est active
  $\alpha > 0$, $S_a > 0$ et $S_t > 0$ donc toutes les composantes du gradient de h_2 sont strictements négatives. Donc le gradient de h_2 est non nul sur ${\mathbb{R}_+^*}^3$.
- 3^ème cas : les contraintes h_1 et h_2 sont toutes les deux actives
  Soient λ_1 et λ_2 deux réels tels que :

$$\lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial(\alpha, S_a, S_t)}(\alpha, S_a, S_t) + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial(\alpha, S_a, S_t)}(\alpha, S_a, S_t) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 P_{max} - 2\lambda_2 K\alpha\,(S_a + 2S_t) = 0 \\ \dfrac{\pi^2 E}{2L^2}\lambda_1\left(\dfrac{S_a}{3} + S_t\right) + K\lambda_2\alpha^2 = 0 \\ \dfrac{\pi^2 E}{2L^2}\lambda_1 S_a + 2\lambda_2 K\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 P_{max} = 2\lambda_2 K\alpha\,(S_a + 2S_t) & (i) \\ \lambda_1^2 P_{max} = 2\lambda_1\lambda_2 K\alpha\,(S_a + 2S_t) & (ii) \\ \dfrac{\pi^2 E}{2L^2}\lambda_1^2 S_a + 2\lambda_1\lambda_2 K\alpha^2 = 0 & (iii) \end{cases}$$

  Comme $P_{max} > 0$, $S_a > 0$ et $S_t > 0$, l'équation (ii) implique $\lambda_1\lambda_2 \geqslant 0$.
  Comme $S_a > 0$ et $\alpha > 0$, l'équation (iii) implique $\lambda_1\lambda_2 \leqslant 0$.
  Ainsi, $\lambda_1\lambda_2 = 0$ donc $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$.
  D'après l'équation (i), $\lambda_2 = 0$ si $\lambda_1 = 0$ et inversement. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ce qui signifie que les gradients de h_1 et h_2 sont linéairement indépendants sur ${\mathbb{R}_+^*}^3$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les contraintes sont qualifiées sur } {\mathbb{R}_+^*}^3.}$

Conditions d'optimalité du 1^er ordre

Soit $\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}, \hat{S_t}\right)$ solution du problème (P3). Les contraintes sont qualifiées sur ${\mathbb{R}_+^*}^3$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^2$ tel que :

- $$\frac{\partial L}{\partial(\alpha, S_a, S_t)}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}, \hat{S_t}, \mu\right) = \frac{\partial f}{\partial(\alpha, S_a, S_t)}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}, \hat{S_t}\right) + \mu_1 \frac{\partial h_1}{\partial(\alpha, S_a, S_t)}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}, \hat{S_t}\right) + \mu_2 \frac{\partial h_2}{\partial(\alpha, S_a, S_t)}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}, \hat{S_t}\right) = 0$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \mu_1 P_{max} - 2\mu_2 K\hat{\alpha}\left(\hat{S_a} + 2\hat{S_t}\right) = 0 & (1) \\ 1 - \mu_1 \dfrac{\pi^2 E}{2L^2}\left(\dfrac{\hat{S_a}}{3} + \hat{S_t}\right) - \mu_2 K\hat{\alpha}^2 = 0 & (2) \\ 2 - \mu_1 \dfrac{\pi^2 E}{2L^2}\hat{S_a} - 2\mu_2 K\hat{\alpha}^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

- $\mu_1 h_1\left(\hat{\alpha}, \hat{S}_a, \hat{S}_t\right) = \mu_1\left(\hat{\alpha}P_{max} - \frac{\pi^2 E}{L^2}\frac{\hat{S}_a}{2}\left(\frac{\hat{S}_a}{6} + \hat{S}_t\right)\right) = 0 \qquad (4)$
- $\mu_2 h_2\left(\hat{\alpha}, \hat{S}_a, \hat{S}_t\right) = \mu_2\left(P_{max} - K\hat{\alpha}^2\left(\hat{S}_a + 2\hat{S}_t\right)\right) = 0 \qquad (5)$

D'après (4) : $\mu_1 = 0$ ou $h_1\left(\hat{\alpha}, \hat{S}_a, \hat{S}_t\right) = 0$.
Si $\mu_1 = 0$ alors (1) implique $\mu_2 = 0$ car $\hat{\alpha} > 0$, $\hat{S}_a > 0$ et $\hat{S}_t > 0$. Mais (2) implique alors $1 = 0$, ce qui est impossible.
Donc $\mu_1 \neq 0$ et $h_1\left(\hat{\alpha}, \hat{S}_a, \hat{S}_t\right) = 0$: $\hat{\alpha}P_{max} = \frac{\pi^2 E}{L^2}\frac{\hat{S}_a}{2}\left(\frac{\hat{S}_a}{6} + \hat{S}_t\right) \qquad (6).$
D'après (5) : $\mu_2 = 0$ ou $h_2\left(\hat{\alpha}, \hat{S}_a, \hat{S}_t\right) = 0$.
Si $\mu_2 = 0$ alors (1) implique $\mu_1 = 0$ car $P_{max} > 0$. Mais (2) implique alors $1 = 0$, ce qui est impossible.
Donc $\mu_2 \neq 0$ et $h_2\left(\hat{\alpha}, \hat{S}_a, \hat{S}_t\right) = 0$: $P_{max} = K\hat{\alpha}^2\left(\hat{S}_a + 2\hat{S}_t\right) \qquad (7)$
D'autre part :

$$(3) - 2(2) \Longrightarrow \mu_1\frac{\pi^2 E}{2L^2}\left(2\hat{S}_t - \frac{\hat{S}_a}{3}\right) = 0 \Longrightarrow \hat{S}_a = 6\hat{S}_t \qquad [\mu_1 > 0]$$

(6) et (7) impliquent alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\alpha}P_{max} = 6\frac{\pi^2 E}{L^2}\hat{S}_t^{\,2} \\ P_{max} = 8K\hat{\alpha}^2\hat{S}_t \\ \hat{S}_a = 6\hat{S}_t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{\alpha} = \left(\frac{3\pi^2 E P_{max}}{32K^2L^2}\right)^{\frac{1}{5}} \\ \hat{S}_t = \left(\frac{{P_{max}}^3 L^4}{288K\pi^4E^2}\right)^{\frac{1}{5}} \\ \hat{S}_a = 6\left(\frac{{P_{max}}^3 L^4}{288K\pi^4E^2}\right)^{\frac{1}{5}} \end{array}\right.$$

<ins>Conditions d'optimalité du 2ème ordre</ins> Appliquons le théorème vu en cours. De toute façon, le théorème donné dans l'énoncé est, pour le problème (P3), équivalent à celui donné dans l'énoncé puisque tous les paramètres de Lagrange sont strictement positifs.
Soient $\left(\hat{\alpha}, \hat{S}_a, \hat{S}_t\right)$ la solution *possible* trouvée précédemment et μ les paramètres de Lagrange associés. Le point $\left(\hat{\alpha}, \hat{S}_a, \hat{S}_t\right)$ est solution du problème (P3) si :

$$v^T\frac{\partial^2 L}{\partial\left(\alpha, S_a, S_t\right)^2}\left(\hat{\alpha}, \hat{S}_a, \hat{S}_t\right)v > 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^3_* \text{ tel que :}$$

$$v^T\frac{\partial h_i}{\partial\left(\alpha, S_a, S_t\right)}\left(\hat{\alpha}, \hat{S}_a, \hat{S}_t\right) = 0 \quad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant 2$$

Calculons le hessien du lagrangien :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\left(\alpha, S_a, S_t\right)^2}\left(\hat{\alpha}, \hat{S}_a, \hat{S}_t\right) = -\begin{bmatrix} 2\mu_2 K\left(\hat{S}_a + 2\hat{S}_t\right) & 2\mu_2 K\hat{\alpha} & 4\mu_2 K\hat{\alpha} \\ 2\mu_2 K\hat{\alpha} & \mu_1\frac{\pi^2 E}{6L^2} & \mu_1\frac{\pi^2 E}{2L^2} \\ 4\mu_2 K\hat{\alpha} & \mu_1\frac{\pi^2 E}{2L^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs v vérifient :

$$\left\{\begin{array}{l} P_{max}v_1 - \frac{\pi^2 E}{2L^2}\left(\frac{\hat{S}_a}{3} + \hat{S}_t\right)v_2 - \frac{\pi^2 E}{2L^2}\hat{S}_a v_3 = 0 \\ -2K\hat{\alpha}\left(\hat{S}_a + 2\hat{S}_t\right)v_1 - K\hat{\alpha}^2 v_2 - 2K\hat{\alpha}^2 v_3 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} P_{max}v_1 - \frac{3\pi^2 E}{2L^2}\hat{S}_t v_2 - 3\frac{\pi^2 E}{L^2}\hat{S}_t v_3 = 0 \\ -16K\hat{\alpha}\hat{S}_t v_1 - K\hat{\alpha}^2 v_2 - 2K\hat{\alpha}^2 v_3 = 0 \end{array}\right.$$

car nous avons vu plus haut que (3) $-$ 2(2) implique $\hat{S_a} = 6\hat{S_t}$.
De plus, nous avons vu également que (6) et (7) impliquent $\hat{\alpha} P_{max} = 6\frac{\pi^2 E}{L^2}\hat{S_t}^2$, ce qui donne, reporté dans la première équation du système ci-dessus :

$$\left\{\begin{array}{l} P_{max}\hat{S}_t v_1 - \frac{3}{2}\frac{\hat{\alpha}P_{max}}{6}v_2 - 3\frac{\hat{\alpha}P_{max}}{6}v_3 = 0 \\ -16K\hat{\alpha}\hat{S}_t v_1 - K\hat{\alpha}^2 v_2 - 2K\hat{\alpha}^2 v_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 4\hat{S}_t v_1 - \hat{\alpha}v_2 - 2\hat{\alpha}v_3 = 0 \\ 16\hat{S}_t v_1 + \hat{\alpha}v_2 + 2\hat{\alpha}v_3 = 0 \end{array}\right. \quad [K\hat{\alpha} \neq 0]$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} v_1 = 0 \\ v_2 + 2v_3 = 0 \end{array}\right. \quad \text{[en ajoutant les deux équations précédentes]}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} v^T \frac{\partial^2 L}{\partial(\alpha, S_a, S_t)^2}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}, \hat{S_t}\right) v &= -\left(\mu_1\frac{\pi^2 E}{6L^2}v_2^2 + 2\mu_1\frac{\pi^2 E}{2L^2}v_2 v_3\right) \\ &= -\mu_1\frac{\pi^2 E}{L^2}\left(\frac{1}{6}v_2^2 + v_2\left(-\frac{1}{2}v_2\right)\right) \\ &= \mu_1\frac{\pi^2 E}{3L^2}v_2^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

En effet , $\mu_1 > 0$ et $v_2 \neq 0$ car, sinon, v_3 serait nul (puisque $v_2 + 2v_3 = 0$) et v serait donc nul (puique $v_1 = 0$), ce qui est exclus par hypothèse.
Par conséquent, le point $\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}, \hat{S_t}\right)$ est une solution locale stricte du problème (P3). Puisque ce point est l'unique solution éventuelle du problème, on en déduit qu'il est l'unique solution stricte du problème (P3).
En conclusion, dans le système de coordonnées initial (e, h, b) :

La solution stricte du problème (P3) est :

$$\boxed{(\hat{e}, \hat{h}, \hat{b}) = \left(\left(\frac{81{P_{max}}^4 L^2}{32K^3\pi^2 E}\right)^{\frac{1}{10}}, \left(\frac{288{P_{max}}^2 K L^6}{\pi^6 E^3}\right)^{\frac{1}{10}}, \left(\frac{{P_{max}}^2 K L^6}{209952\pi^6 E^3}\right)^{\frac{1}{10}}\right)}$$

2.6 Comparaison de la masse du raidisseur en I optimal et du raidisseur âme mince optimal pour le problème (P3) *(2 points)*

Le raidisseur âme mince correspond au cas où $b = 0$. Le problème (P4) qu'on souhaite résoudre est donc le problème (P3) augmenté de la contrainte $b = 0$, soit $S_t = 0$:

$$(P4) \qquad \min_{\substack{\alpha P_{max} \leqslant \frac{\pi^2 E}{L^2}\frac{S_a}{2}\left(\frac{S_a}{6}+S_t\right) \\ P_{max} \leqslant K\alpha^2(S_a+2S_t) \\ S_t=0 \\ \alpha>0 \\ S_a>0}} (S_a + 2S_t)$$

La solution du problème (P2) est certes une âme mince, mais elle n'est peut-être pas optimale pour le problème (P3) puisque les contraintes imposées aux problèmes (P2) et (P3) ne sont pas les mêmes.
Le problème (P4) est équivalent au problème (P5) **à 2 variables** suivant, en gardant à l'esprit $S_t = 0$:

$$(P5) \qquad \min_{\substack{12\alpha P_{max}L^2 \leqslant \pi^2 E S_a^2 \\ P_{max} \leqslant K\alpha^2 S_a \\ \alpha>0 \\ S_a>0}} S_a$$

Remarque : ce genre de simplification d'un problème égalité en problème inégalité seulement est en général difficile voire impossible à réaliser.
Les contraintes inégalité h_1 et h_2 deviennent :

$$h_1 : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, S_a) & \longmapsto & 12\alpha P_{max}L^2 - \pi^2 E S_a^2 \end{array}$$

Gradient de h_1 : $\forall \ (\alpha, S_a) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial h_1}{\partial (\alpha, S_a)}(\alpha, S_a) = \begin{bmatrix} 12P_{max}L^2 \\ -2\pi^2 E S_a \end{bmatrix}$

$$h_2 : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, S_a) & \longmapsto & P_{max} - K\alpha^2 S_a \end{array}$$

Gradient de h_2 : $\forall \ (\alpha, S_a) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial h_2}{\partial (\alpha, S_a)}(\alpha, S_a) = \begin{bmatrix} -2K\alpha S_a \\ -K\alpha^2 \end{bmatrix}$

Qualification des contraintes

Montrons que : $\forall \ (\alpha, S_a) \in \mathbb{R}^2$, $G_{(\alpha,S_a)}(\Omega) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \ : \ v^T \dfrac{\partial h_i}{\partial (\alpha, S_a)}(\alpha, S_a) < 0 \ , \ i \in A(\alpha, S_a) \right\} \neq \emptyset$ pour $(\alpha, S_a) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$

- 1er cas : $A(\alpha, S_a) = \{1\}$

$$v^T \frac{\partial h_1}{\partial (\alpha, S_a)}(\alpha, S_a) = 12P_{max}L^2 v_1 - 2\pi^2 E S_a v_2 < 0$$

  en prenant $v_1 = 0$ et $v_2 = 1$, car $S_a > 0$
- 2ème cas : $A(\alpha, S_a) = \{2\}$

$$v^T \frac{\partial h_2}{\partial (\alpha, S_a)}(\alpha, S_a) = -2K\alpha S_a v_1 - K\alpha^2 v_2 < 0$$

  en prenant $v_1 = v_2 = 1$ car $\alpha > 0$ et $S_a > 0$
- 3ème cas : $A(\alpha, S_a) = \{1, 2\}$

$$v^T \frac{\partial h_1}{\partial (\alpha, S_a)}(\alpha, S_a) = 12P_{max}L^2 v_1 - 2\pi^2 E S_a v_2 < 0$$
$$v^T \frac{\partial h_2}{\partial (\alpha, S_a)}(\alpha, S_a) = -2K\alpha S_a v_1 - K\alpha^2 v_2 < 0$$

  en prenant $v_1 = 0$ et $v_2 = 1$ car $S_a > 0$ et $\alpha \neq 0$

Conclusion : $\boxed{\text{Les contraintes sont qualifiées sur } {\mathbb{R}_+^*}^2.}$

Conditions d'optimalité du 1er ordre Soit $\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ solution du problème (P5). Les contraintes sont qualifiées en (α, S_a) donc il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^2$ tel que :

- $\dfrac{\partial L}{\partial (\alpha, S_a)}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}, \mu\right) = \dfrac{\partial f}{\partial (\alpha, S_a)}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) + \mu_1 \dfrac{\partial h_1}{\partial (\alpha, S_a)}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) + \mu_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial (\alpha, S_a)}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) = 0$

  Donc : $\begin{cases} 12\mu_1 P_{max}L^2 - 2\mu_2 K\hat{\alpha}\hat{S_a} = 0 & (1) \\ 1 - 2\pi^2 \mu_1 E\hat{S_a} - \mu_2 K\hat{\alpha}^2 = 0 & (2) \end{cases}$
- $\mu_1 h_1\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) = \mu_1 \left(12\hat{\alpha}P_{max}L^2 - \pi^2 E\hat{S_a}^2\right) = 0 \qquad (3)$
- $\mu_2 h_2\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) = \mu_2 \left(P_{max} - K\hat{\alpha}^2\hat{S_a}\right) = 0 \qquad (4)$

D'après (3) : $\mu_1 = 0$ ou $h_1\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) = 0$

Si $\mu_1 = 0$ alors (1) implique $\mu_2 = 0$ car $\hat{\alpha} \neq 0$ et $\hat{S_a} \neq 0$. Mais alors (2) implique $1 = 0$, ce qui

est impossible.
Donc $\mu_1 \neq 0$ et $h_1\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) = 0$: $12\hat{\alpha}P_{max}L^2 = \pi^2 E\hat{S_a}^2$ (5)
D'après (4) : $\mu_2 = 0$ ou $h_2\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) = 0$
Si $\mu_2 = 0$ alors (1) implique $\mu_1 = 0$. Mais alors (2) implique $1 = 0$, ce qui est impossible.
Donc $\mu_2 \neq 0$ et $h_2\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) = 0$: $P_{max} = K\hat{\alpha}^2\hat{S_a}$ (6)
(5) et (6) impliquent :

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\alpha} = \left(\dfrac{\pi^2 E P_{max}}{12K^2L^2}\right)^{\frac{1}{5}} \\ \hat{S_a} = \left(\dfrac{144{P_{max}}^3L^4}{K\pi^4E^2}\right)^{\frac{1}{5}} \end{array}\right.$$

<u>Conditions d'optimalité du 2^{ème} ordre</u>
Soient $\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right)$ la solution *possible* trouvée et précédemment et μ les paramètres de lagrange correspondants. Ce point appartient à l'ensemble ${\mathbb{R}_+^*}^2$ sur lequel les contraintes sont qualifiées.
Donc $\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right)$ est solution de (P5) si :

$$v^T \frac{\partial^2 L}{\partial(\alpha, S_a)^2}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) v > 0 \qquad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}_*^2 \text{ tel que :}$$

$$v^T \frac{\partial h_i}{\partial(\alpha, S_a)}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) = 0 \qquad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant 2$$

Le hessien de L vaut :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial(\alpha, S_a)^2}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) = \begin{bmatrix} -2\mu_2 K\hat{S_a} & -2\mu_2 K\hat{\alpha} \\ -2\mu_2 K\hat{\alpha} & -2\pi^2\mu_1 E \end{bmatrix}$$

Les vecteurs v vérifient :

$$\left\{\begin{array}{l} 12P_{max}L^2v_1 - 2\pi^2E\hat{S_a}v_2 = 0 \\ -2K\hat{\alpha}\hat{S_a}v_1 - K\hat{\alpha}^2v_2 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 6P_{max}L^2v_1 = \pi^2E\hat{S_a}v_2 & (i) \\ 2\hat{S_a}v_1 + \hat{\alpha}v_2 = 0 \qquad [K\hat{\alpha} \neq 0] & (ii) \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} v^T \frac{\partial^2 L}{\partial(\alpha, S_a)^2}\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right) v &= -2\mu_2K\hat{S_a}v_1^2 - 2\pi^2\mu_1Ev_2^2 - 4\mu_2K\hat{\alpha}v_1v_2 \\ &= -2\mu_2K\hat{S_a}v_1^2 - 12\mu_1\frac{P_{max}L^2}{\hat{S_a}}v_1v_2 - 4\mu_2K\hat{\alpha}v_1v_2 \qquad [\text{d'après } (i)] \\ &= -2\mu_2K\hat{S_a}v_1^2 + 24\mu_1\frac{P_{max}L^2}{\hat{\alpha}}v_1^2 + 8\mu_2K\hat{S_a}v_1^2 \qquad [\text{d'après } (ii)] \\ &= 6\mu_2K\hat{S_a}v_1^2 + 24\mu_1\frac{P_{max}L^2}{\hat{\alpha}}v_1^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

car $\hat{\alpha} > 0$, $\hat{S_a} > 0$ et $v \neq 0$ ($v_1 \neq 0$ ou $v_2 \neq 0$).
Par conséquent, le point $\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}\right)$ est une solution locale stricte du problème (P5). Puisque ce point est l'unique slution éventuelle du problème, on en déduit qu'il est l'unique solution stricte du problème (P5). Comme le problème (P5) est équivalent au problème (P4) avec $S_t = 0$, on en déduit que l'unique solution stricte du problème (P4) est le point $\left(\hat{\alpha}, \hat{S_a}, 0\right)$.

Comme L et la masse volumique du matériau des raidisseurs sont constantes, comparer les masses optimales des problèmes (P3) et (P4) revient à comparer les surfaces d'une coupe transversale des raidisseurs :

$$\begin{aligned}
\frac{S_{(P3)}}{S_{(P4)}} &= \frac{8\hat{S}_{t(P3)}}{\hat{S}_{a(P4)}} \qquad [\hat{S}_{a(P3)} = 6\hat{S}_{t(P3)} \text{ et } \hat{S}_{t(P4)} = 0] \\
&= \frac{8\left(\dfrac{{P_{max}}^3 L^4}{288K\pi^4E^2}\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(\dfrac{144{P_{max}}^3 L^4}{K\pi^4E^2}\right)^{\frac{1}{5}}} \\
&= 8\left(\frac{144}{288}\right)^{\frac{1}{5}} \\
&= \frac{1}{4} \\
&< 1
\end{aligned}$$

La masse du raidisseur optimal en I est inférieure à la masse du raidisseur âme mince optimal.
En effet, nous avons démontré que la forme optimale du raidisseur, c'est-à-dire celle qui permet de tenir le mieux possible la charge maximale imposée à l'avion, est un I ($b \neq 0$). Cette forme est bien connue des ingénieurs en structure des matériaux, qui l'ont découvert initialement de manière expérimentale. Le cas réel contient d'ailleurs beaucoup plus de variables que le cas d'étude présenté dans ce problème.
Si cette forme n'est pas respectée (âme mince par exemple), l'inertie du raidisseur, et donc sa masse, doivent être plus importantes pour supporter cette charge maximale.

Remarque : l'optimalité des algorithmes d'optimisation non linéaire sous contraintes n'est que locale. Les ingénieurs partent donc d'un raidisseur en forme de I dont les dimensions, obtenues expérimentalement, sont quasiment optimales. C'est ensuite un logiciel d'optimisation non linéaire sous contraintes qui calcule les dimensions optimales du raidisseur, avec comme point initial le raidisseur en I obtenu expérimentalement. Comme l'optimalité n'est pas globale, le logiciel risque, avec un point initial quelconque, de calculer un raidisseur dont les dimensions ne sont absolument pas optimales : les contraintes de flambage seront certes vérifiées, mais la masse du raidisseur ne sera pas optimisée.