Examen d'Optimisation Non-Linéaire

IENAC07 - 28 janvier 2008

Documents autorisés : une feuille manuscrite recto-verso.
Matériel autorisé : aucun.

1 Question de cours : Optimisation sur un ensemble ouvert

[2 points] Enoncer et expliquer le théorème d'optimisation d'une fonction multivariable sur un ensemble ouvert.

2 Exercice : Théorème de la dualité

On cherche à minimiser la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} {\mathbb{R}_*^+}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \end{array} \right.$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1$.

1. *[1 points]* Ecrire ce problème sous forme d'un problème d'optimisation sous contrainte inégalité.
2. *[2 points]* Montrer que f et la contrainte sont convexes.
3. *[3 points]* Résoudre le problème en utilisant le théorème de la dualité.

3 Problème : le problème de tir

La détermination de la trajectoire d'un engin sans propulsion (missile, fusée expérimentale, balle, boule de pétanque, ...) après son tir est un exercice classique. On se propose ici de prendre ce problème "à l'envers" et de chercher, non pas la trajectoire de l'objet, mais les conditions initiales du tir nécessaires pour atteindre un point donné.

On considère donc, comme indiqué sur la figure, qu'on tire un obus depuis un point de coordonnées $(0, 0)$ et qu'on souhaite atteindre un point de coordonnées $(x_f, 0)$. Pour cela, on communique initialement à l'obus une vitesse v avec un angle θ avec l'horizontale.

1. *[2 points]* On rappelle que l'application du principe fondamental de la dynamique fournit les deux équations :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g \tag{2}$$

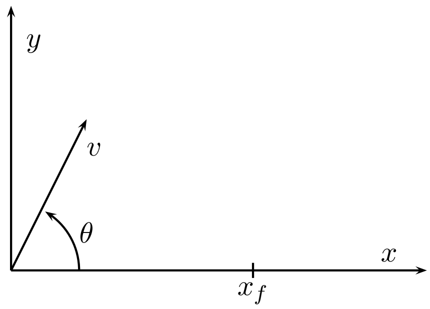

Figure 1: Problème de tir

g est l'accélération de la pesanteur (on prend g positif).
En intégrant ces deux équations et en utilisant la condition aux limites qui indique que la trajectoire passe par le point $(x_f, 0)$, donner la durée de vol t_f ainsi que la relation que doivent satisfaire v et θ pour atteindre le point final.

2. *[1 point]* Utiliser cette dernière relation pour définir le domaine dans lequel on va chercher v et θ.

3. *[1 point]* Dans un premier temps, pour assurer un risque d'interception minimum, on veut minimiser le temps de vol de l'obus. On est toutefois limité dans la vitesse initiale qu'on sait communiquer à l'obus : cette dernière ne peut dépasser une valeur v_m. Ecrire le problème comme le problème de minimisation sous contraintes (P_1) en identifiant les fonctions f_1, g, h, m_1, m_2 et m_3.

$$(P_1) : \begin{cases} \min\limits_{(v,\theta)\in\mathbb{R}^2} f_1(v,\theta) \\ g(v,\theta) = 0 \\ h(v,\theta) \leq 0 \\ m_1(v) < 0 \\ m_2(\theta) < 0 \\ m_3(\theta) < 0 \end{cases}$$

4. *[2 points]* On se place dans le cas où $v_m^2 > gx_f$. Montrer que les contraintes sont qualifiées. Sans le résoudre, expliquer pourquoi le cas $v_m^2 = gx_f$ pose problème pour la qualification. Physiquement, à quoi correspond ce cas ?
De même, à quoi correspond le cas $v_m^2 < gx_f$?

5. *[3 points]* Résoudre ce problème. Pouvait-on intuitivement s'attendre au résultat ?

6. *[1 point]* On considère à présent que le commanditaire du tir est prêt à faire un compromis entre la durée de vol et l'énergie utilisée pour le tir afin de minimiser les coûts (considération particulièrement importante dans le cadre de l'application à la pétanque). Cette dernière est directement reliée à l'énergie cinétique de l'obus en sortie de canon. Il nous demande donc maintenant de minimiser la fonction $f_2(v,\theta) = t_f(v,\theta) + \frac{1}{2}Cv^2$, où C est un paramètre d'échange traduisant le compromis entre temps de trajet et coût du vol. Ecrire le problème d'optimisation sous contraintes (P_2) correspondant ainsi que la condition du premier ordre sans chercher à la résoudre. Pourquoi ce système d'équations est-il complexe à résoudre ?

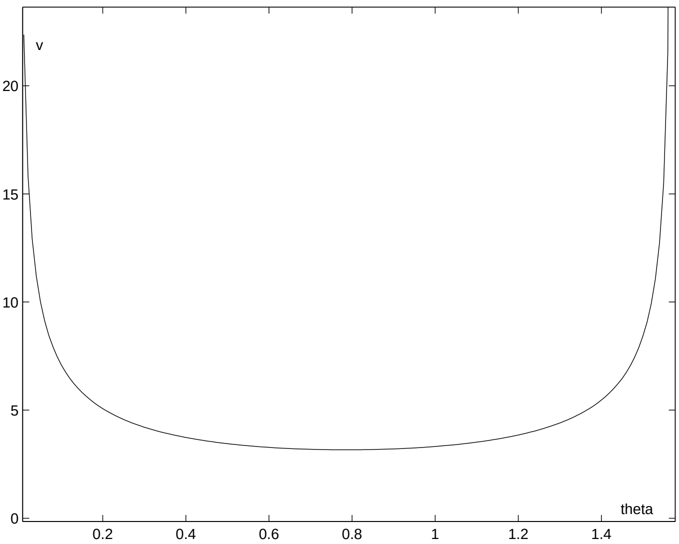

Figure 2: Résolution numérique de la contrainte égalité

7. *[question bonus]* Proposer une méthode numérique pour résoudre ce problème.

8. *[2 points]* On s'intéresse à présent à la résolution approchée de la contrainte égalité. On a affiché la résolution numérique de cette contrainte sur la figure 2 pour le cas $g = 10$ et $x_f = 1$. On sait par ailleurs qu'en réalité, le débattement du canon ne lui permet de toute façon pas d'atteindre les angles de 0 et $\pi/2$ radians. Les valeurs minimale et maximale de l'inclinaison du canon sont respectivement $\theta_{min} = 0.05rad$ et $\theta_{max} = 1.55rad$. On se propose d'interpoler le résultat numérique de $v(\theta)$ par un polynôme d'ordre 2 afin de simplifier la forme analytique de la contrainte égalité. On se dote pour celà, à x_f fixé, d'une discrétisation du domaine de θ en m points. On a donc l'ensemble $\{\theta_j, 1 \leq j \leq m\}$. On veut trouver une bonne interpolation de la fonction $v(\theta)$, on va le faire au sens des moindres carrés. Ecrire le problème de minimisation associé.
   On pourra noter $G_j = G(\theta_j) = \sqrt{\frac{gx_f}{\sin(2\theta_j)}}$.
   Résoudre ce problème en fonction de l'ensemble des G_j.