Examen de rappel d'Optimisation Non Linéaire

ENAC – 1er Septembre 2004

1 Exercice 1 : qualification des contraintes et dualité *(11 points)*

Soit le sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y(x-1) + x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad -y(1+x) - x \leqslant 0\}$$

1. Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$
   Représenter graphiquement le domaine Ω en remarquant que les frontières de Ω s'écrivent $y = -f(x-1) - 1$ et $y = f(x+1) - 1$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$. *(1 point)*
2. Déterminer le cône admissible en $(0, 0)$:
   (a) graphiquement ; *(1 point)*
   (b) par application de la définition de l'ensemble des directions admissibles ; *(2 points)*
   (c) en utilisant le fait que les contraintes sont qualifiées en $(0, 0)$. *(2 points)*
3. On considère maintenant le sous-ensemble Σ de $\mathbb{R}^2$ défini par :

   $$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (y(x-1) + x)\,(y(1+x) + x) \leqslant 0\}$$

   (a) Les contraintes sont-elles qualifiées en $(0, 0)$? *(1 point)*
   (b) Résoudre par dualité le problème d'optimisation (P_Σ) :

   $$(P_\Sigma) \ : \quad \min_{(x,y)\in\Sigma} x^2 + (y+1)^2 \qquad \textit{(4 points)}$$

2 Exercice 2 : optimisations géométriques *(9 points)*

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des triangles d'aire maximale inclus dans un disque ou un carré.

1. Soit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et trois points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$. Calculer l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ en fonction de x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 . *(1 point)*
   Indication : l'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est égale à la norme de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$
2. Déterminer l'ensemble des triangles d'aire maximale inclus dans un disque de rayon r. Il est conseillé d'abord de montrer que les contraintes sont toutes actives puis ensuite d'effectuer un changement de variable adéquat. *(4 points)*
3. Déterminer l'ensemble des triangles d'aire maximale inclus dans un carré de côté a. *(4 points)*