

Corrigé de l'examen de rappel d'Optimisation Non Linéaire

ENAC – 1^{er} Septembre 2004

Remarque préliminaire : l'examen était long et le deuxième exercice était relativement difficile, du moins en utilisant les techniques lagrangiennes (de simples considérations géométriques permettent en effet de résoudre très facilement les problèmes posés mais ce n'était pas le but de cet examen). Aussi, le barème a été modifié afin que le total soit de 30 points. Les 10 points supplémentaires ont été essentiellement répartis sur les questions que les élèves ont traité en majorité.

1 Exercice 1 : qualification des contraintes et dualité (18 points)

Cet exercice, mise à part la question 3, est la réplique de l'exercice 1 du TD2 avec des contraintes différentes.

$$\text{Soient } h_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y(x-1) + x \end{array} \quad \text{et } h_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & -y(1+x) - x \end{array} .$$

1.1 Question 1 (2 points)

- La frontière $h_1(x, y) = 0$ est, d'après le calcul suivant, une translation de vecteur $(1, 0)$ suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisse puis d'une translation de vecteur $(0, -1)$ de l'hyperbole d'équation $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} h_1(x, y) = 0 &\iff y = \frac{x}{1-x} \quad (x \neq 1) \\ &\iff y = \frac{x-1+1}{1-x} \\ &\iff y = -1 + \frac{1}{1-x} \\ &\iff y = -1 - f(x-1) \end{aligned}$$

- De même, la frontière $h_2(x, y) = 0$ est une translation de vecteur $(-1, -1)$ de l'hyperbole d'équation $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} h_2(x, y) = 0 &\iff y = -\frac{x}{1+x} \quad (x \neq -1) \\ &\iff y = -\frac{x+1-1}{1+x} \\ &\iff y = -1 + \frac{1}{1+x} \\ &\iff y = -1 + f(x+1) \end{aligned}$$

Pour identifier les points de Ω , on peut remarquer que le point $(0, 1)$ vérifie à la fois $h_1(0, 1) = -1 \leq 0$ et $h_2(0, 1) = -1 \leq 0$ donc $(0, 1) \in \Omega$.

Les transformations géométriques qui permettent d'obtenir le domaine Ω sont représentées sur la figure suivante.

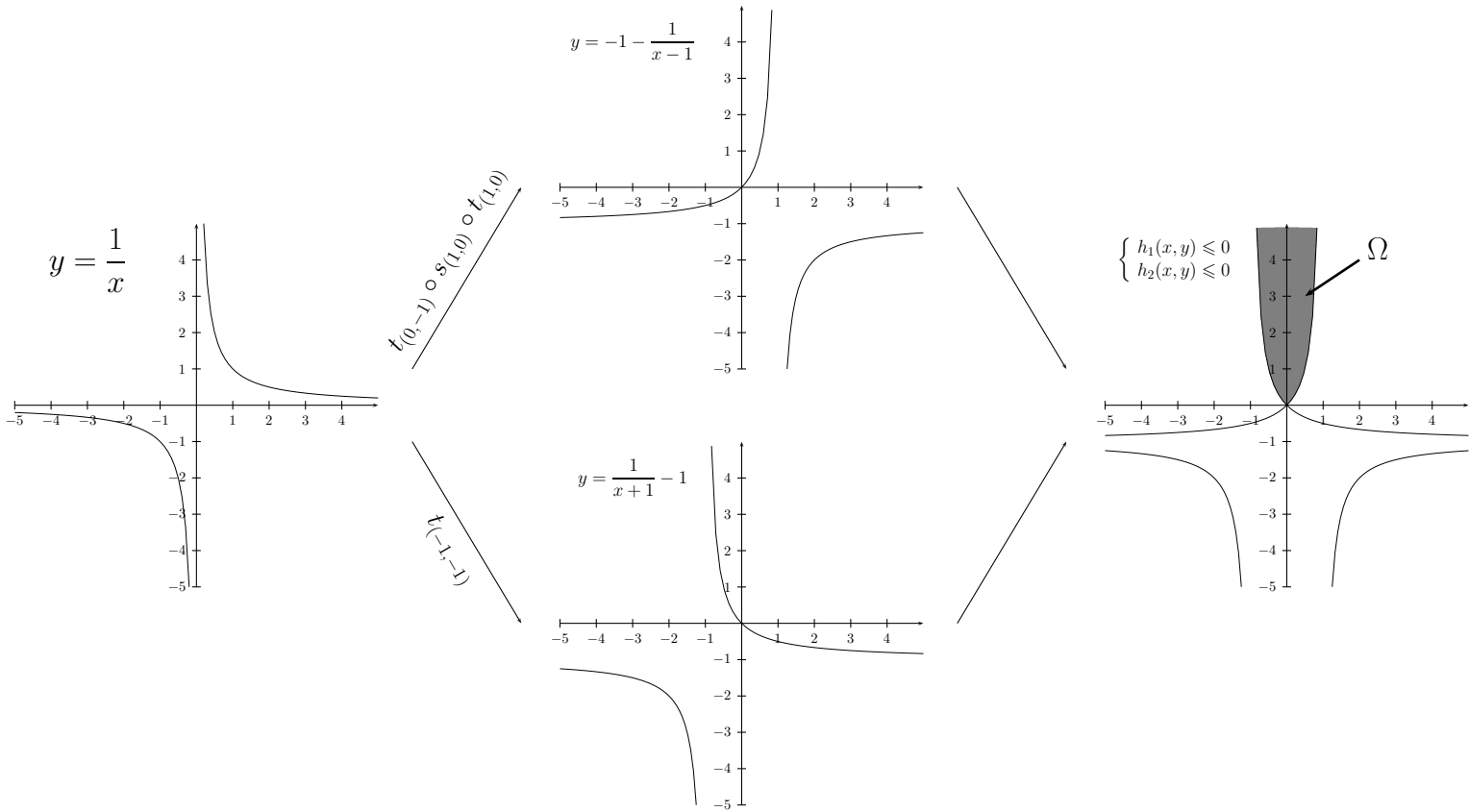


FIG. 1 – Transformations géométriques permettant d'obtenir le domaine Ω .

1.2 Question 2 (7 points)

1.2.1 Détermination graphique du cône admissible en $(0,0)$ (1 point)

Le cône admissible en $(0,0)$ est le cône engendré par les vecteurs directeurs (ou leurs opposés si on quitte le domaine lorsque x augmente) aux tangentes aux fonctions représentant la frontière en $x = 0$ (cf. figure 2) :

- $\forall x \neq 1 : y_1(x) = -1 - f(x-1) \implies y'_1(x) = -f'(x-1) = \frac{1}{(x-1)^2} \implies y'_1(0) = 1$
- $\forall x \neq -1 : y_2(x) = -1 + f(x+1) \implies y'_2(x) = f'(x+1) = -\frac{1}{(x+1)^2} \implies y'_2(0) = -1$

Conclusion : Le cône admissible en $(0,0)$ est le cône engendré par les vecteurs $(1,1)$ et $(-1,1)$.

1.2.2 Détermination du cône admissible en $(0,0)$ par application de la définition de l'ensemble des directions admissibles (4 points)

Nous devons montrer que :

- pour tout vecteur v dans le cône admissible en $(0,0)$ de la figure précédente, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ telle que :
 - $\varphi(0) = (0,0)$
 - $\varphi'(0) = v$
 - $\varphi(t) \in \Omega$ pour tout $t > 0$ petit
- pour tout vecteur v à l'extérieur du cône, il n'existe pas de fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ vérifiant les 3 points précédents.

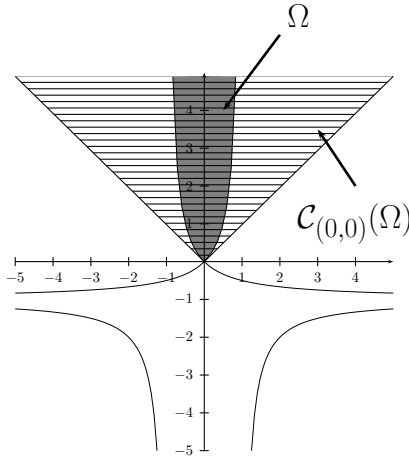


FIG. 2 – Représentation graphique de $\mathcal{C}_{(0,0)}(\Omega)$

Nous allons procéder en plusieurs étapes : d'abord les frontières du domaine (cas 1 et 2), ensuite l'intérieur strict du domaine (cas 3 et 4) et enfin l'extérieur strict du domaine (cas 5 et 6). Il est important pour la compréhension de comparer les différents cas au domaine Ω et au cône admissible $\mathcal{C}_{(0,0)}(\Omega)$ représentés sur la figure précédente.

1. Montrons d'abord que $(1, 1)$ est une direction admissible.

La fonction y_1 définie à la question précédente permet d'obtenir la fonction paramétrée φ en prenant comme paramètre $t = x$. Comme φ doit être dérivable sur \mathbb{R} et que y_1 n'est ni définie ni prolongeable par continuité en 1, on ne peut pas prendre $\varphi = y_1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Par exemple, on peut poser :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \varphi(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{1-t} \\ t \end{bmatrix} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{De la sorte : } \begin{cases} \varphi_y \left(\frac{1}{2} \right)^- = 1 = \varphi_y \left(\frac{1}{2} \right)^+ \\ \varphi'_y \left(\frac{1}{2} \right)^- = 4 = \varphi'_y \left(\frac{1}{2} \right)^+ \end{cases} \text{ donc } \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2).$$

De plus :

$$- \varphi(0) = (0, 0)$$

$$- \forall t \in \left[0, \frac{1}{2} \right] : \varphi'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{(1-t)^2} \end{bmatrix} \text{ donc } \varphi'(0) = (1, 1)$$

$$- \forall t \in \left[0, \frac{1}{2} \right] :$$

$$\begin{cases} \varphi_y(t)(\varphi_x(t) - 1) + \varphi_x(t) = \frac{t}{1-t}(t-1) + t = \frac{t(t-1) + t(1-t)}{1-t} = 0 \\ -\varphi_y(t)(1 + \varphi_x(t)) - \varphi_x(t) = -\frac{t}{1-t}(1+t) - t = -\frac{t(1+t) + t(1-t)}{1-t} = -\frac{2t}{1-t} \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \varphi(t) \in \Omega \text{ pour tout } t \text{ dans } \left[0, \frac{1}{2} \right]$$

Conclusion : $(1, 1)$ est une direction admissible en $(0, 0)$.

2. Montrons que $(-1, 1)$ est une direction admissible.

Comme précédemment, la fonction y_2 permet d'obtenir la fonction paramétrée φ en prenant comme paramètre $t = -x$ car, en partant du point $(0, 0)$, le point $(x, y_2(x))$ reste dans le domaine Ω dans le sens des x décroissants. Afin que φ soit de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$, on peut poser :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \varphi(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} -t \\ \frac{t}{1-t} \end{bmatrix} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \begin{bmatrix} -t \\ 4t-1 \end{bmatrix} & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie bien que φ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ puis que :

- $\varphi(0) = (0, 0)$

- $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] : \varphi'(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{(1-t)^2} \end{bmatrix}$ donc $\varphi'(0) = (-1, 1)$

- $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] :$

$$\begin{cases} \varphi_y(t)(\varphi_x(t) - 1) + \varphi_x(t) = \frac{t}{1-t}(-t-1) - t = \frac{-t(t+1) - t(1-t)}{1-t} = -\frac{2t}{1-t} \leq 0 \\ -\varphi_y(t)(1 + \varphi_x(t)) - \varphi_x(t) = -\frac{t}{1-t}(1-t) + t = \frac{-t(1-t) + t(1-t)}{1-t} = 0 \end{cases}$$

donc $\varphi(t) \in \Omega$ pour tout t dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Conclusion : $(-1, 1)$ est une direction admissible en $(0, 0)$.

3. Soit un réel $a > 1$: montrons que $(1, a)$ est une direction admissible en $(0, 0)$.

Graphiquement, il est clair que la droite de vecteur directeur $(1, a)$ est un arc de courbe admissible. Posons : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi(t) = \begin{bmatrix} t \\ at \end{bmatrix}$. Alors :

- $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$

- $\varphi(0) = (0, 0)$

- $\forall t \in \mathbb{R}_+ : \varphi'(t) = (1, a)$ donc $\varphi'(0) = (1, a)$

- $\forall t \in \mathbb{R}_+ :$

$\diamond \varphi_y(t)(\varphi_x(t) - 1) + \varphi_x(t) \leq 0 \iff at(t-1) + t = t(at+1-a) \leq 0 \iff t \leq 1 - \frac{1}{a}$

$\diamond -\varphi_y(t)(1 + \varphi_x(t)) - \varphi_x(t) = -at(1+t) - t = -t(at+a+1) \leq 0$

donc $\varphi(t) \in \Omega$ pour tout t dans $\left]0, \frac{1}{a}\right]$

Conclusion : $(1, a)$ est une direction admissible en $(0, 0)$ pour tout $a > 1$.

4. Soit un réel $a > 1$: montrons que $(-1, a)$ est une direction admissible en $(0, 0)$.

Identique au cas précédent.

5. Soit un réel $a < 1$: montrons par contraposée que $(1, a)$ n'est pas une direction admissible en $(0, 0)$.

Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ telle que :

- $\varphi(0) = (0, 0)$

- $\varphi'(0) = (1, a)$

D'après le théorème de Taylor à l'ordre 1, il existe un voisinage $\zeta > 0$ tel que :

$\forall t \in [0, \zeta], \varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + o(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{o(t)}{t} = 0$.

soit : $\forall t \in V, \varphi(t) = 0 + t \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} + o(t)$

Montrons que $h_1(\varphi_x(t), \varphi_y(t)) > 0$ pour tout $t > 0$ petit :

$$\begin{aligned} \varphi_y(t)(\varphi_x(t) - 1) + \varphi_x(t) &= (at + o_y(t))(t + o_x(t) - 1) + t + o_x(t) \\ &= at^2 + (1 - a)t + t(ao_x(t) + o_y(t)) + o_x(t) - o_y(t) + o_x(t)o_y(t) \\ &= at^2 + (1 - a)t + \tilde{o}(t) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{o}(t)}{t} = 0$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 : 0 < t < \eta_\varepsilon \implies |o_1(t)| < \varepsilon t$

donc : $\exists \eta > 0 : 0 < t\eta_1 \implies -(1 - a)t < \tilde{o}(t) < (1 - a)t \quad (1 - a > 0)$

d'où : $\forall t \in [0, \min(\zeta, \eta)] , \varphi_y(t)(\varphi_x(t) - 1) + \varphi_x(t) = at^2 + (1 - a)t + \tilde{o}(t) > at^2 > 0$

Ainsi $\varphi(t) \notin \Omega$ pour tout $t > 0$ petit, si bien que $(1, a)$ n'est pas une direction admissible en $(0, 0)$.

6. Soit un réel $a < 1$: montrons que $(-1, a)$ n'est pas une direction admissible en $(0, 0)$.

Identique au cas précédent en considérant la contrainte h_2 .

Conclusion : $\mathcal{C}_{(0,0)}(\Omega)$ est le cône engendré par les vecteurs $(1, 1)$ et $(-1, 1)$.

1.2.3 Détermination du cône admissible en $(0, 0)$ en utilisant le fait que les contraintes sont qualifiées en $(0, 0)$ (2 points)

Pour démontrer que les contraintes sont qualifiées en $(0, 0)$, plusieurs méthodes sont possibles sauf celles qui se basent sur des contraintes convexes puisque h_1 et h_2 ne sont pas convexes.

Calculons d'abord les jacobiniennes de h_1 et h_2 en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} - \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial h_1}{\partial(x, y)}(x, y) &= \begin{bmatrix} y + 1 \\ x - 1 \end{bmatrix} \text{ donc } \frac{\partial h_1}{\partial(x, y)}(0, 0) = (1, -1) \\ - \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial h_2}{\partial(x, y)}(x, y) &= \begin{bmatrix} -(y + 1) \\ -(1 + x) \end{bmatrix} \text{ donc } \frac{\partial h_2}{\partial(x, y)}(0, 0) = (-1, -1) \end{aligned}$$

Ainsi, les gradients des contraintes en $(0, 0)$ sont indépendants donc les contraintes sont régulières, et donc qualifiées, en $(0, 0)$.

On peut dire également que $G_{(0,0)}(\Omega)^- = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot \frac{\partial h_i}{\partial(x, y)}(0, 0) < 0, i \in A(0, 0) \right\} \neq \emptyset$: $A(0, 0) = \{1, 2\}$ car h_1 et h_2 sont saturées en $(0, 0)$ donc :

$$G_{(0,0)}(\Omega)^- = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : v_1 - v_2 < 0 \text{ et } v_1 + v_2 > 0\}$$

En particulier, le vecteur $(0, 1)$ est un élément de $G_{(0,0)}(\Omega)^-$ donc $G_{(0,0)}(\Omega)^- \neq \emptyset$.

Puisque les contraintes sont qualifiées :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{(0,0)}(\Omega) &= G_{(0,0)}(\Omega) \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot \frac{\partial h_i}{\partial(x, y)}(0, 0) \leq 0, i \in A(0, 0) \right\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : v_1 - v_2 \leq 0 \text{ et } v_1 + v_2 \geq 0\} \end{aligned}$$

qui correspond bien au cône représenté sur la figure 2.

Conclusion : $\mathcal{C}_{(0,0)}(\Omega)$ est le cône engendré par les vecteurs $(1, 1)$ et $(-1, 1)$.

1.3 Question 3 (9 points)

1.3.1 Qualification des contraintes en $(0,0)$ (1 point)

$$\begin{aligned} (y(x-1)+x)(y(1+x)+x) \leq 0 &\iff \begin{cases} y(x-1)+x \leq 0 \text{ et } y(1+x)+x \geq 0 \\ \text{ou} \\ y(x-1)+x \geq 0 \text{ et } y(1+x)+x \leq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} h_1(x,y) \leq 0 \text{ et } h_2(x,y) \leq 0 \\ \text{ou} \\ -h_1(x,y) \leq 0 \text{ et } -h_2(x,y) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le domaine Σ est donc la réunion de $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(x,y) \leq 0 \text{ et } h_2(x,y) \leq 0\}$ et de $\tilde{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -h_1(x,y) \leq 0 \text{ et } -h_2(x,y) \leq 0\}$ qui ont les mêmes frontières $h_1(x,y) = 0$ et $h_2(x,y) = 0$. Pour identifier les points de $\tilde{\Omega}$, on peut remarquer que le point $(0, -1)$ vérifie à la fois $-h_1(0, -1) = -1 \leq 0$ et $-h_2(0, -1) = -1 \leq 0$ donc $(0, -1) \in \tilde{\Omega}$.

Le domaine Σ et son cône admissible en $(0,0)$ sont représentés sur la figure suivante.

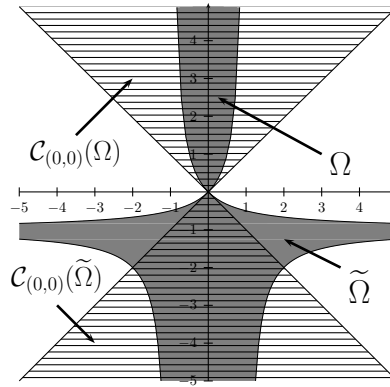


FIG. 3 – Représentation graphique du domaine $\Sigma = \Omega \cup \tilde{\Omega}$ et du cône admissible $\mathcal{C}_{(0,0)}(\Sigma) = \mathcal{C}_{(0,0)}(\Omega) \cup \mathcal{C}_{(0,0)}(\tilde{\Omega})$

Le cône admissible en $(0,0)$ n'est pas un cône géométrique, ce qui traduit le fait que les contraintes ne sont pas qualifiées en $(0,0)$. En effet, Σ est la réunion de deux ensembles de contraintes qui se « concurrencent » l'un et l'autre. Pour le prouver, il suffit de démontrer que $G_{(0,0)}(\Sigma) \neq \mathcal{C}_{(0,0)}(\Sigma)$.

Σ s'écrit $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -h_1(x,y)h_2(x,y) \leq 0\}$ donc :

$$\begin{aligned} G_{(0,0)}(\Sigma) &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial(-h_1h_2)}{\partial(x,y)}(0,0) \cdot v \leq 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \left(-\frac{\partial h_1}{\partial x}(0,0)h_2(0,0) - h_1(0,0)\frac{\partial h_2}{\partial x}(0,0) \right) v_x + \left(-\frac{\partial h_1}{\partial y}(0,0)h_2(0,0) - h_1(0,0)\frac{\partial h_2}{\partial y}(0,0) \right) v_y \leq 0 \right\} \\ &= \{ v \in \mathbb{R}^2 : (-1 \times 0 - 0 \times (-1))v_x + (1 \times 0 - 0 \times (-1))v_y \leq 0 \} \\ &= \{ v \in \mathbb{R}^2 : 0 \cdot v \leq 0 \} \\ &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Or $\mathcal{C}_{(0,0)}(\Sigma) \neq \mathbb{R}^2$ donc $\mathcal{C}_{(0,0)}(\Sigma) \neq G_{(0,0)}(\Sigma)$.

Conclusion : La contrainte n'est pas qualifiée en $(0,0)$.

1.3.2 Résolution par dualité du problème d'optimisation (P_Σ) (8 points)

Les contraintes ne sont pas qualifiées sur tout le domaine Σ donc le théorème de la dualité ne s'applique pas sur Σ . En revanche, il est aisé de démontrer que les contraintes sont qualifiées sur $\Sigma \setminus (0, 0)$.

Soit un point $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Sigma \setminus (0, 0)$ où la contrainte $h(x, y) = -h_1(x, y)h_2(x, y)$ est active, c'est-à-dire $h_1(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ ou $h_2(\hat{x}, \hat{y}) = 0$: supposons par exemple que $h_1(\hat{x}, \hat{y}) = 0$. Il suffit de montrer que le gradient de h ne s'annule qu'en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial(x, y)}(\hat{x}, \hat{y}) &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial h_1}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y})h_2(\hat{x}, \hat{y}) - h_1(\hat{x}, \hat{y})\frac{\partial h_2}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) \\ -\frac{\partial h_1}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y})h_2(\hat{x}, \hat{y}) - h_1(\hat{x}, \hat{y})\frac{\partial h_2}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial h_1}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y})h_2(\hat{x}, \hat{y}) \\ -\frac{\partial h_1}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y})h_2(\hat{x}, \hat{y}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(\hat{y} + 1)h_2(\hat{x}, \hat{y}) \\ -(\hat{x} - 1)h_2(\hat{x}, \hat{y}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \left\| \frac{\partial h}{\partial(x, y)}(\hat{x}, \hat{y}) \right\|^2 = h_2(\hat{x}, \hat{y})^2 ((\hat{y} + 1)^2 + (\hat{x} - 1)^2) = 0 \implies \begin{cases} h_2(\hat{x}, \hat{y}) = 0 & (\text{et } h_1(\hat{x}, \hat{y}) = 0) \\ \text{ou} \\ \hat{y} = -1 \text{ et } \hat{x} = 1 \end{cases}$$

Le deuxième cas peut être directement éliminé car il correspond à un point où la contrainte n'est pas active : $h_1(1, -1) = 1 \neq 0$ et $h_2(1, -1) = 1 \neq 0$ donc $h(1, -1) \neq 0$.

Quant au premier cas, il n'est vérifié qu'en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} h_1(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \text{ et } h_2(\hat{x}, \hat{y}) = 0 &\implies \begin{cases} \hat{y}(\hat{x} - 1) + \hat{x} = 0 & (1) \\ \hat{y}(1 + \hat{x}) + \hat{x} = 0 & (2) \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} -2\hat{y} = 0 & ((1) - (2)) \\ \hat{y}(1 + \hat{x}) + \hat{x} = 0 \end{cases} \\ &\implies \hat{y} = 0 \text{ et } \hat{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ainsi : } (\hat{x}, \hat{y}) \in \Sigma \setminus (0, 0) \implies \frac{\partial h}{\partial(x, y)}(\hat{x}, \hat{y}) \neq 0$$

Conclusion : les contraintes sont régulières, et donc qualifiées, sur $\Sigma \setminus (0, 0)$.

Le théorème de la dualité s'applique donc sur $\Sigma \setminus (0, 0)$ si bien qu'on peut résoudre le problème d'optimisation (P_Σ) sur cet ensemble. On devra ensuite comparer le point solution trouve (s'il y en a un) au point $(0, 0)$ laissé de côté.

Soit $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Sigma \setminus (0, 0)$. Les contraintes sont qualifiées en (\hat{x}, \hat{y}) donc (\hat{x}, \hat{y}) est solution de (P_Σ) si et seulement si (\hat{x}, \hat{y}) est solution de :

$$(Dual) \quad \sup_{\mu \geq 0} \inf_{(x, y) \in \Sigma \setminus (0, 0)} L(x, y, \mu)$$

$$1. \text{ Résolution de } \inf_{(x, y) \in \Sigma \setminus (0, 0)} L(x, y, \mu)$$

$$L(x, y, \mu) = x^2 + (y + 1)^2 - \mu h_1(x, y)h_2(x, y)$$

D'après les conditions d'optimalité du premier ordre sans contraintes, (\hat{x}, \hat{y}) est solution

de $\inf_{(x,y) \in \Sigma \setminus (0,0)} L(x,y,\mu)$ implique $\frac{\partial L}{\partial(x,y)}(\hat{x},\hat{y}) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial(x,y)}(\hat{x},\hat{y}) = 0 &\implies \begin{cases} 2\hat{x} - \mu \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}(\hat{x},\hat{y})h_2(\hat{x},\hat{y}) + h_1(\hat{x},\hat{y})\frac{\partial h_2}{\partial x}(\hat{x},\hat{y}) \right) = 0 \\ 2(\hat{y} + 1) - \mu \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})h_2(\hat{x},\hat{y}) + h_1(\hat{x},\hat{y})\frac{\partial h_2}{\partial y}(\hat{x},\hat{y}) \right) = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 2\hat{x} - \mu(-(\hat{y} + 1)(2\hat{x}\hat{y} + 2\hat{x})) = 0 \\ 2(\hat{y} + 1) - \mu(-2\hat{y}(\hat{x}^2 - 1) - 2\hat{x}^2) = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \hat{x}(1 + \mu(\hat{y} + 1)^2) = 0 \\ \hat{y} + 1 + \mu(\hat{y}(\hat{x}^2 - 1) + \hat{x}^2) = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \hat{x} = 0 & (1 + \mu(\hat{y} + 1)^2 \geq 1 > 0) \\ \hat{y} + 1 - \mu\hat{y} = 0 \end{cases} \\ &\implies (\hat{x},\hat{y}) = \left(0, \frac{1}{\mu - 1}\right) \text{ et } \mu \neq 1 \end{aligned}$$

Le point $\left(0, \frac{1}{\mu - 1}\right)$ est solution si $\frac{\partial^2 L}{\partial(x,y)^2}(\hat{x},\hat{y}) = 2 \begin{bmatrix} 1 + \mu(\hat{y} + 1)^2 & 0 \\ 0 & 1 - \mu \end{bmatrix} \geq 0$,
c'est-à-dire si $0 \leq \mu < 1$ (car $\mu \neq 1$).

2. Résolution de $\inf_{\mu \geq 0} \psi(\mu)$ avec $\psi : \begin{matrix} [0, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mu & \longmapsto & \inf_{(x,y) \in \Sigma \setminus (0,0)} L(x,y,\mu) \end{matrix}$

$$\begin{aligned} \forall \mu \in [0, 1[, \psi(\mu) &= \inf_{(x,y) \in \Sigma \setminus (0,0)} L(x,y,\mu) = L(\hat{x}(\mu), \hat{y}(\mu), \mu) \\ &= \left(\frac{1}{\mu - 1} + 1 \right)^2 + \mu \left(-\frac{1}{(\mu - 1)^2} \right) \\ &= \frac{\mu^2 - \mu}{(\mu - 1)^2} \\ &= \frac{\mu}{\mu - 1} \end{aligned}$$

Calculons les variations de ψ afin de trouver son maximum :

$$\forall \mu \in [0, 1[, \psi'(\mu) = -\frac{1}{(\mu - 1)^2} < 0$$

ψ est donc décroissante sur $[0, 1[$ donc elle atteint son maximum en $\mu = 0$. Ainsi, $(\hat{x}(0), \hat{y}(0)) = (0, -1)$, ce qui était évident graphiquement puisque la fonction à minimiser est constante sur des cercles de centre $(0, -1)$, situé dans le domaine Σ , et qu'elle augmente au fur et à mesure qu'on s'éloigne de ce centre.

Il reste à comparer la valeur du critère en $(0, 0)$ à la solution calculée sur $\Sigma \setminus (0, 0)$.

Le critère en $(0, 0)$ vaut 1 alors qu'il vaut 0 en $(0, -1)$ donc le point $(0, 0)$ n'est pas solution du problème d'optimisation (P_Σ) .

Conclusion : La solution du problème d'optimisation (P_Σ) est le point $(0, -1)$.

2 Exercice 2 : optimisation géométriques (12 points)

2.1 Calcul de l'aire d'un triangle en fonction de ces coordonnées (2 points)

L'aire du triangle $M_1M_2M_3$ est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme formé à partir des points M_1 , M_2 et M_3 . Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(M_1M_2M_3) &= \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \end{bmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)| \\ &= \frac{1}{2} |x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 - y_2x_3 + y_2x_1 + y_1x_3| \end{aligned}$$

L'expression précédente est bien symétrique en (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) , c'est-à-dire que toute permutation de ces 3 vecteurs ramène à la même aire.

2.2 Détermination de l'ensemble des triangles d'aire maximale inclus dans un disque de rayon r (6 points)

Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\max_{\substack{x_1^2+y_1^2 \leq r^2 \\ x_2^2+y_2^2 \leq r^2 \\ x_3^2+y_3^2 \leq r^2}} \frac{1}{2} |x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 - y_2x_3 + y_2x_1 + y_1x_3|$$

Or le critère à maximiser n'est pas différentiable sur \mathbb{R}^6 puisque la fonction "valeur absolue" n'est pas dérivable en 0. Cependant, il n'est pas restrictif de supposer que le triangle $M_1M_2M_3$ est *direct*, c'est-à-dire défini dans le sens trigonométrique direct, ce qui signifie que la troisième composante de $\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$ est positive. De plus, il est évident que la solution du problème correspond à une aire non nulle puisque, par exemple, les triangles rectangles inscrits dans un cercle de rayon r (dont un côté est le diamètre du cercle) ne sont pas plats donc ils ont une aire non nulle.

Le problème d'optimisation précédent se ramène donc au problème d'optimisation suivant :

$$(P) \quad \min_{\substack{x_1^2+y_1^2 \leq r^2 \\ x_2^2+y_2^2 \leq r^2 \\ x_3^2+y_3^2 \leq r^2 \\ x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1 > x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2}} -(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2)$$

La dernière contrainte définit un ensemble ouvert donc, d'après le théorème d'optimisation dans un ensemble ouvert, $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3)$ est solution de (P) si et seulement si $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3)$ vérifie $\hat{x}_1\hat{y}_2 + \hat{x}_2\hat{y}_3 + \hat{x}_3\hat{y}_1 > \hat{x}_1\hat{y}_3 + \hat{x}_2\hat{y}_1 + \hat{x}_3\hat{y}_2$ et $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3)$ est solution du problème d'optimisation :

$$(P') \quad \min_{\substack{x_1^2+y_1^2 \leq r^2 \\ x_2^2+y_2^2 \leq r^2 \\ x_3^2+y_3^2 \leq r^2}} x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1$$

– Qualification des contraintes

Les contraintes sont convexes car leur matrice hessienne est $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$.

De plus, l'intérieur du domaine est non vide en prenant par exemple le point $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ car $0^2 + 0^2 < r^2$ (on suppose évidemment que le cercle est de rayon non nul).

Ainsi, d'après le lemme de qualification, les contraintes sont qualifiées sur \mathbb{R}^6 .

– Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

Soit $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3) \in \mathbb{R}^6$ une solution de (P') . Les contraintes sont qualifiées en $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3)$ donc il existe $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3) \in \mathbb{R}_+^3$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)}(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3) = 0 \\ \hat{\mu}_1 (\hat{x}_1^2 + \hat{y}_1^2 - r^2) = 0 \\ \hat{\mu}_2 (\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2 - r^2) = 0 \\ \hat{\mu}_3 (\hat{x}_3^2 + \hat{y}_3^2 - r^2) = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{ll} \hat{y}_3 - \hat{y}_2 + 2\hat{\mu}_1 \hat{x}_1 = 0 & (1) \\ \hat{x}_2 - \hat{x}_3 + 2\hat{\mu}_1 \hat{y}_1 = 0 & (2) \\ \hat{y}_1 - \hat{y}_3 + 2\hat{\mu}_2 \hat{x}_2 = 0 & (3) \\ \hat{x}_3 - \hat{x}_1 + 2\hat{\mu}_2 \hat{y}_2 = 0 & (4) \\ \hat{y}_2 - \hat{y}_1 + 2\hat{\mu}_3 \hat{x}_3 = 0 & (5) \\ \hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 2\hat{\mu}_3 \hat{y}_3 = 0 & (6) \\ \hat{\mu}_1 (\hat{x}_1^2 + \hat{y}_1^2 - r^2) = 0 & (7) \\ \hat{\mu}_2 (\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2 - r^2) = 0 & (8) \\ \hat{\mu}_3 (\hat{x}_3^2 + \hat{y}_3^2 - r^2) = 0 & (9) \end{array} \right.$$

Supposons qu'un des sommets du triangle soit strictement à l'intérieur du cercle, par exemple M_1 . Donc $\hat{x}_1^2 + \hat{y}_1^2 < r^2$ et donc, d'après (7) : $\hat{\mu}_1 = 0$.

Ainsi, d'après (1) et (2) : $\hat{y}_2 = \hat{y}_3$ et $\hat{x}_2 = \hat{x}_3$, c'est-à-dire $M_2 = M_3$ ce qui est impossible puisque les triangles solutions ne sont pas plats (contrainte $\hat{x}_1 \hat{y}_2 + \hat{x}_2 \hat{y}_3 + \hat{x}_3 \hat{y}_1 > \hat{x}_1 \hat{y}_3 + \hat{x}_2 \hat{y}_1 + \hat{x}_3 \hat{y}_2$). Donc tous les sommets du triangle sont sur le cercle.

Par conséquent, il existe $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3) \in [0, 2\pi]^3$ tels que $(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = (r \cos \hat{\theta}_1, r \sin \hat{\theta}_1)$, $(\hat{x}_2, \hat{y}_2) = (r \cos \hat{\theta}_2, r \sin \hat{\theta}_2)$ et $(\hat{x}_3, \hat{y}_3) = (r \cos \hat{\theta}_3, r \sin \hat{\theta}_3)$. Le système précédent devient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \hat{\theta}_3 - \sin \hat{\theta}_2 + 2\hat{\mu}_1 \cos \hat{\theta}_1 = 0 \\ \cos \hat{\theta}_2 - \cos \hat{\theta}_3 + 2\hat{\mu}_1 \sin \hat{\theta}_1 = 0 \\ \sin \hat{\theta}_1 - \sin \hat{\theta}_3 + 2\hat{\mu}_2 \cos \hat{\theta}_2 = 0 \\ \cos \hat{\theta}_3 - \cos \hat{\theta}_1 + 2\hat{\mu}_2 \sin \hat{\theta}_2 = 0 \\ \sin \hat{\theta}_2 - \sin \hat{\theta}_1 + 2\hat{\mu}_3 \cos \hat{\theta}_3 = 0 \\ \cos \hat{\theta}_1 - \cos \hat{\theta}_2 + 2\hat{\mu}_3 \sin \hat{\theta}_3 = 0 \end{array} \right.$$

Les deux premières équations du système précédent s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \sin \frac{\hat{\theta}_3 - \hat{\theta}_2}{2} \cos \frac{\hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_2}{2} + 2\hat{\mu}_1 \cos \hat{\theta}_1 = 0 \\ -2 \sin \frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_3}{2} \sin \frac{\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3}{2} + 2\hat{\mu}_1 \sin \hat{\theta}_1 = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_3}{2} \cos \frac{\hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_2}{2} = \hat{\mu}_1 \cos \hat{\theta}_1 \quad (1') \\ \sin \frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_3}{2} \sin \frac{\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3}{2} = \hat{\mu}_1 \sin \hat{\theta}_1 \quad (2') \end{array} \right.$$

$$\implies \sin^2 \frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_3}{2} = \hat{\mu}_1^2 \quad ((1')^2 + (2')^2)$$

$$\implies \sin \frac{\hat{\theta}_3 - \hat{\theta}_2}{2} = \hat{\mu}_1$$

En effet, $\hat{\mu}_1 \geq 0$ et $0 \leq \hat{\theta}_3 - \hat{\theta}_2 \leq 2\pi$ (car le triangle $M_1 M_2 M_3$ est direct) donc $\sin \frac{\hat{\theta}_3 - \hat{\theta}_2}{2} \leq 0$.

Les équations (1') et (2') s'écrivent donc :

$$\begin{cases} -\hat{\mu}_1 \cos \frac{\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3}{2} = \hat{\mu}_1 \cos \hat{\theta}_1 \\ -\hat{\mu}_1 \sin \frac{\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3}{2} = \hat{\mu}_1 \sin \hat{\theta}_1 \end{cases}$$

Or $\mu_1 \neq 0$ car, sinon, $M_2 = M_3$ d'après (1) et (2) ce qui est impossible puisque les triangles solutions ne sont pas plats. Ainsi :

$$\begin{cases} -\cos \frac{\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3}{2} = \cos \hat{\theta}_1 \\ -\sin \frac{\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3}{2} = \sin \hat{\theta}_1 \end{cases} \implies \frac{\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3}{2} = \pi + \hat{\theta}_1 + 2k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

Par symétrie entre $(\hat{\theta}_1, \hat{\mu}_1)$, $(\hat{\theta}_2, \hat{\mu}_2)$ et $(\hat{\theta}_3, \hat{\mu}_3)$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3}{2} = \pi + \hat{\theta}_1 + 2k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z} \\ \frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_3}{2} = \pi + \hat{\theta}_2 + 2k_2\pi, \quad k_2 \in \mathbb{Z} \\ \frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}{2} = \pi + \hat{\theta}_3 + 2k_3\pi, \quad k_3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Or nous savons géométriquement que la solution du problème est invariante par rotation et donc qu'elle n'est pas unique. Ceci peut se vérifier en calculant le déterminant du système précédent, qui est nul. Fixons donc par exemple $\hat{\theta}_1$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_3}{2} = \pi + \hat{\theta}_2 + 2k_2\pi, \quad k_2 \in \mathbb{Z} \\ \frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}{2} = \pi + \hat{\theta}_3 + 2k_3\pi, \quad k_3 \in \mathbb{Z} \end{cases} &\implies \begin{cases} \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_1 - 2\pi \left(1 + \frac{2}{3}(2k_2 + k_3) \right) \\ \hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_1 - 2\pi \left(1 + \frac{2}{3}(k_2 + 2k_3) \right) \end{cases}, \quad (k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^2 \\ &\implies \begin{cases} \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_1 + \frac{2\pi}{3}k'_2, \quad k'_2 \in \mathbb{Z} \\ \hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_1 + \frac{2\pi}{3}k'_3, \quad k'_3 \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Compte-tenu que les triangles solutions sont non plats et directs, un simple dessin permet de ne retenir que les solutions telles que $k'2 = 3k''_2 + 1$ et $k'3 = 3k''_3 - 1$ avec $(k''_2, k''_3) \in \mathbb{Z}^2$, qui correspondent à des triangles équilatéraux. La contrainte ouvert $\hat{x}_1\hat{y}_2 + \hat{x}_2\hat{y}_3 + \hat{x}_3\hat{y}_1 > \hat{x}_1\hat{y}_3 + \hat{x}_2\hat{y}_1 + \hat{x}_3\hat{y}_2$ est vérifiée, puisqu'elle traduit le fait que le triangle $M_1M_2M_3$ est direct.

– Condition suffisante d'optimalité du second ordre

Le critère du problème d'optimisation (P') n'étant pas convexe, il n'est pas possible d'appliquer la condition suffisante d'optimalité du premier ordre. Nous devons donc calculer la matrice hessienne du lagrangien :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)^2}(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3) = \begin{bmatrix} 2\hat{\mu}_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2\hat{\mu}_1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\hat{\mu}_2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2\hat{\mu}_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\hat{\mu}_3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2\hat{\mu}_3 \end{bmatrix}$$

Nous devons démontrer que :

$$\forall v \in \mathcal{C}_{(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3)}(\Omega), \quad v^T \frac{\partial^2 L}{\partial (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)^2}(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3) v \geq 0$$

Il n'est pas évident de transformer l'expression précédente en somme de carrés. Calculons donc les valeurs propres du hessien de L dans l'espoir qu'elles sont positives. Au pire, les calculs dans une base de vecteurs propres sont en général plus aisés.

Remarquons d'abord, ainsi que nous l'avons démontré plus haut, que :

$$\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_3 = \sin \frac{\hat{\theta}_3 - \hat{\theta}_2}{2} = \sin \frac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_3}{2} = \sin \frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1}{2} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le polynôme caractéristique du hessien est donc :

$$\begin{aligned} P(X) &= \begin{vmatrix} \sqrt{3}-X & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3}-X & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}-X & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \sqrt{3}-X & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \sqrt{3}-X & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \sqrt{3}-X \end{vmatrix} \\ &= (\sqrt{3}-X) \begin{vmatrix} \sqrt{3}-X & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3}-X & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}-X & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \sqrt{3}-X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \sqrt{3}-X \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3}-X & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}-X & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{3}-X & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \sqrt{3}-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3}-X & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}-X & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \sqrt{3}-X & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \sqrt{3}-X \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \dots \\ &= (\sqrt{3}-X)^2 \left((\sqrt{3}-X)^4 - 6(\sqrt{3}-X)^2 + 9 \right) \\ &= (\sqrt{3}-X)^2 \left((\sqrt{3}-X)^2 - 3 \right)^2 \\ &= X^2 (\sqrt{3}-X)^2 (2\sqrt{3}-X)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres du hessien de L sont donc 0, $\sqrt{3}$ et $2\sqrt{3}$ qui sont toutes les trois positives. Par conséquent, la matrice hessienne de L est positive donc la condition suffisante d'optimalité est vérifiée.

Conclusion : L'ensemble des triangles d'aire maximale inclus dans un disque de rayon r sont les triangles équilatéraux inscrits dans le cercle de rayon r .

2.3 Détermination de l'ensemble des triangles d'aire maximale inclus dans un carré de côté a (4 points)

Supposons que le centre du repère est situé au centre du carré et que ses axes sont parallèles aux côtés du carré. Si nous supposons comme dans le problème d'optimisation précédent que le triangle $M_1M_2M_3$ est direct, le problème d'optimisation s'écrit :

$$(P) \quad \min_{\substack{(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]^6 \\ x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 > x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2}} -(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2)$$

La dernière contrainte définit un ensemble ouvert donc, d'après le théorème d'optimisation dans un ensemble ouvert, $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3)$ est solution de (P) si et seulement si $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3)$ vérifie $\hat{x}_1\hat{y}_2 + \hat{x}_2\hat{y}_3 + \hat{x}_3\hat{y}_1 > \hat{x}_1\hat{y}_3 + \hat{x}_2\hat{y}_1 + \hat{x}_3\hat{y}_2$ et $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_3)$ est solution du problème d'optimisation :

$$(P') \quad \min_{(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]^6} x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1$$

– Qualification des contraintes

Les contraintes sont affines donc elles sont qualifiées sur \mathbb{R}^6 .

– Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

Soit $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^6$ une solution de (P'). Les contraintes sont qualifiées en (\hat{x}, \hat{y}) donc il existe $\hat{\mu}^-, \hat{\mu}^+, \hat{\lambda}^-$ et $\hat{\lambda}^+$ dans \mathbb{R}_+^3 tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{y}_3 - \hat{y}_2 - \hat{\mu}_1^- + \hat{\mu}_1^+ = 0 \quad (1) \\ \hat{x}_2 - \hat{x}_3 - \hat{\lambda}_1^- + \hat{\lambda}_1^+ = 0 \quad (2) \\ \hat{y}_1 - \hat{y}_3 - \hat{\mu}_2^- + \hat{\mu}_2^+ = 0 \quad (3) \\ \hat{x}_3 - \hat{x}_1 - \hat{\lambda}_2^- + \hat{\lambda}_2^+ = 0 \quad (4) \\ \hat{y}_2 - \hat{y}_1 - \hat{\mu}_3^- + \hat{\mu}_3^+ = 0 \quad (5) \\ \hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{\lambda}_3^- + \hat{\lambda}_3^+ = 0 \quad (6) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu}_1^- \left(\frac{a}{2} + \hat{x}_1 \right) = 0 \quad (7) \\ \hat{\mu}_1^+ \left(\hat{x}_1 - \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (8) \\ \hat{\lambda}_1^- \left(\frac{a}{2} + \hat{y}_1 \right) = 0 \quad (9) \\ \hat{\lambda}_1^+ \left(\hat{y}_1 - \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (10) \\ \hat{\mu}_2^- \left(\frac{a}{2} + \hat{x}_2 \right) = 0 \quad (11) \\ \hat{\mu}_2^+ \left(\hat{x}_2 - \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (12) \\ \hat{\lambda}_2^- \left(\frac{a}{2} + \hat{y}_2 \right) = 0 \quad (13) \\ \hat{\lambda}_2^+ \left(\hat{y}_2 - \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (14) \\ \hat{\mu}_3^- \left(\frac{a}{2} + \hat{x}_3 \right) = 0 \quad (15) \\ \hat{\mu}_3^+ \left(\hat{x}_3 - \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (16) \\ \hat{\lambda}_3^- \left(\frac{a}{2} + \hat{y}_3 \right) = 0 \quad (17) \\ \hat{\lambda}_3^+ \left(\hat{y}_3 - \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (18) \end{array} \right.$$

jacobienne du critère contraintes

Montrons par contraposée que tous les sommets du triangle sont sur les côtés du carré. Supposons par exemple que M_1 n'est pas sur un côté du carré, c'est-à-dire que $-\frac{a}{2} < \hat{x}_1 < \frac{a}{2}$ et $-\frac{a}{2} < \hat{y}_1 < \frac{a}{2}$. D'après les équations (7), (8), (9) et (10) : $\hat{\mu}_1^- = \hat{\mu}_1^+ = \hat{\lambda}_1^- = \hat{\lambda}_1^+ = 0$. Ce qui, reporté dans les équations (1) et (2), donne $\hat{y}_2 = \hat{y}_3$ et $\hat{x}_2 = \hat{x}_3$, c'est-à-dire

$M_2 = M_3$. Or les triangles solutions n'étant pas plats (contrainte $\hat{x}_1\hat{y}_2 + \hat{x}_2\hat{y}_3 + \hat{x}_3\hat{y}_1 > \hat{x}_1\hat{y}_3 + \hat{x}_2\hat{y}_1 + \hat{x}_3\hat{y}_2$), $M_2 \neq M_3$.

Ainsi, tous les sommets du triangle sont sur les côtés du carré.

D'autre part, toute solution du problème est invariante par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ puisque le carré est lui-même invariant par cette rotation. Nous pouvons donc décider, par exemple, que M_1 est sur le côté gauche du carré.

Afin de simplifier le système d'équations précédent, supposons dans un premier temps que M_1 n'est pas sur un des deux sommets du côté gauche. Ainsi, pour M_1 , seule la contrainte $-\frac{a}{2} \leq \hat{x}_1$ est active si bien que $\hat{\mu}_1^+ = \hat{\lambda}_1^- = \hat{\lambda}_1^+ = 0$ d'après les équations (8), (9) et (10).

Ce qui, reporté dans les équations (1) et (2), donne $\hat{x}_2 = \hat{x}_3$ et $\hat{\mu}_1^- = \hat{y}_3 - \hat{y}_2 \geq 0$. Étant donné que les triangles solutions ne sont pas plats, trois cas sont donc possibles, représentés sur la figure suivante :

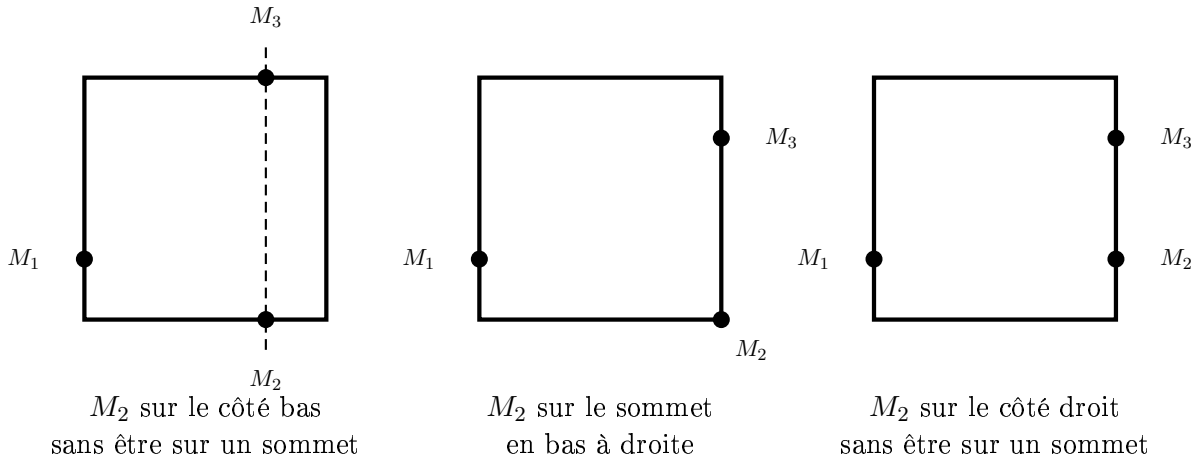


FIG. 4 – 3 configurations possibles lorsque M_1 est strictement sur le côté gauche du carré

Les deux cas de droite ont eux-mêmes deux sous-cas selon que M_3 est sur le sommet en haut à droite ou strictement à l'intérieur du côté droit.

– cas 1 : M_2 est strictement sur le côté bas du carré

Pour M_2 , seule la contrainte $-\frac{a}{2} \leq \hat{y}_2$ est active donc, d'après les équations (11) et (12) : $\hat{\mu}_2^- = \hat{\mu}_2^+ = 0$. Reporté dans l'équation (3), ceci donne : $\hat{y}_1 = \hat{y}_3$, ce qui signifie que M_3 est soit confondu avec M_1 – impossible car les triangles solutions ne sont pas plats – soit situé sur le côté droit du carré – impossible car $\hat{x}_3 = \hat{x}_2$ et M_2 est strictement sur le côté bas du carré. Donc ce cas est impossible.

– cas 2 : M_2 est sur le sommet en bas à droite du carré

Comme $\hat{x}_2 = \hat{x}_3$, M_3 est situé sur le côté droit du carré. Si M_3 n'est pas sur un sommet du carré, seule la contrainte $\hat{x}_3 \leq \frac{a}{2}$ est active (pour M_3), donc d'après les équations (17) et (18) : $\hat{\lambda}_3^- = \hat{\lambda}_3^+ = 0$. Reporté dans l'équation (6), ceci donne : $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$, ce qui est impossible puisque M_2 est situé strictement sur le côté bas du carré et que M_1 est sur le côté gauche du carré. Donc M_3 est nécessairement sur le sommet en haut à droite du carré. Les équations qui découlent de cette configuration ne mènent ensuite à aucune contradiction.

– cas 3 : M_2 est strictement sur le côté droit du carré

Pour M_2 , seule la contrainte $\hat{x}_2 \leq -\frac{a}{2}$ est active donc, d'après les équations (13) et

(14) : $\hat{\lambda}_2^- = \hat{\lambda}_2^+ = 0$. Reporté dans l'équation (4), ceci donne : $\hat{x}_3 = \hat{x}_1$, ce qui est impossible puisque $\hat{x}_2 = \hat{x}_3$ donc on aurait $\hat{x}_2 = \hat{x}_1$ alors que M_1 est sur le côté gauche du carré et M_2 est sur le côté droit du carré. Ce cas est donc impossible.

Ainsi, lorsque M_1 est strictement sur le côté gauche du carré, la seule configuration possible est celle où M_2 est sur le sommet en bas à droite du carré et M_3 est sur le sommet en haut à gauche, ce qui correspond à une aire de $\frac{a^2}{2}$ pour tous les triangles $M_1M_2M_3$ possibles.

Il s'ensuit que si ces triangles sont solutions alors les triangles où M_1 est sur le sommet en bas à gauche du carré, avec soit M_2 sur le sommet en bas à droite et M_3 sur le côté haut, soit M_3 sur le sommet en haut à gauche et M_2 sur le côté droit, sont solutions puisqu'ils ont la même aire que les triangles précédemment trouvés. De même, les triangles où M_3 est sur le sommet en haut à gauche du carré, avec soit M_2 sur le sommet en bas à gauche et M_3 sur le côté droit, soit M_3 sur le sommet en haut à droite et M_2 sur le côté bas, sont solutions. Tous les autres cas sont impossibles en reprenant le raisonnement effectué précédemment avec M_1 pour un des points situés strictement à l'intérieur d'un côté du carré.

Par conséquent, les triangles *potentiellement* solutions sont ceux où deux points sont sur les sommets d'un même côté du carré et le troisième point sur le côté opposé.

– Condition suffisante d'optimalité

La condition suffisante d'optimalité du second ordre ne permet malheureusement pas de conclure à l'optimalité des solutions potentielles précédemment trouvées. En effet, le hessien de L est (en notation vectorielle) :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial(x, y)^2}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\mu}^-, \hat{\mu}^+, \hat{\lambda}^-, \hat{\lambda}^+) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est la même que le hessien du problème précédent sauf que la diagonale est translatée de $-\sqrt{3}$. Ses valeurs propres, qui sont donc également translatées de $-\sqrt{3}$, sont $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$. La matrice hessienne de L n'est donc pas positive sur \mathbb{R}^6 . Malheureusement, elle ne l'est pas non plus sur $\mathcal{C}_{\hat{x}, \hat{y}}(\Omega)$ pour une solution (\hat{x}, \hat{y}) donnée. Considérons par exemple le point $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, qui est une solution potentielle du problème. Les seules contraintes actives sont (7), (9), (12), (13), (16) et (18). Les contraintes étant qualifiées sur tout le domaine (car elles sont affines), le cône admissible en ce point est :

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^6 : \frac{\partial h_i}{\partial(x, y)}(\hat{x}, \hat{y})v \leq 0, i \in A(\hat{x}, \hat{y}) \right\} = \{-v_1 \leq 0, -v_2 \leq 0, v_3 \leq 0, -v_4 \leq 0, v_5 \leq 0, v_6 \leq 0\}$$

Prenons par exemple $v = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$:

$$v^T \frac{\partial^2 L}{\partial(x, y)^2}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\mu}^-, \hat{\mu}^+, \hat{\lambda}^-, \hat{\lambda}^+)v = -2 < 0$$

Donc nous ne pouvons pas conclure avec cette méthode que le point $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ est solution du problème. Il ne nous reste qu'une seule méthode : démontrer que l'aire de tout triangle inclus dans le carré est inférieure à l'aire d'un des triangles potentiellement solution, c'est-à-dire $\frac{a^2}{2}$.

Il est d'abord évident qu'un triangle strictement inclus dans le carré a une aire plus petite qu'au moins un triangle dont les sommets sont sur le carré. Il suffit en effet de déplacer successivement tous les sommets du triangle le long de la hauteur qui leur est issue jusqu'à ce qu'ils touchent un côté du carré. L'aire augmente ainsi sans cesse puisque elle est égale à la moitié de la longueur de la hauteur multipliée par la longueur du côté opposé dont la longueur est fixe.

Le problème revient donc à montrer que l'aire de tout triangle dont les sommets sont sur les côtés du carré est inférieure à $\frac{a^2}{2}$. Soit $M_1M_2M_3$ un tel triangle : deux configurations seulement sont possibles (aux rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ près), représentées sur la figure suivante.

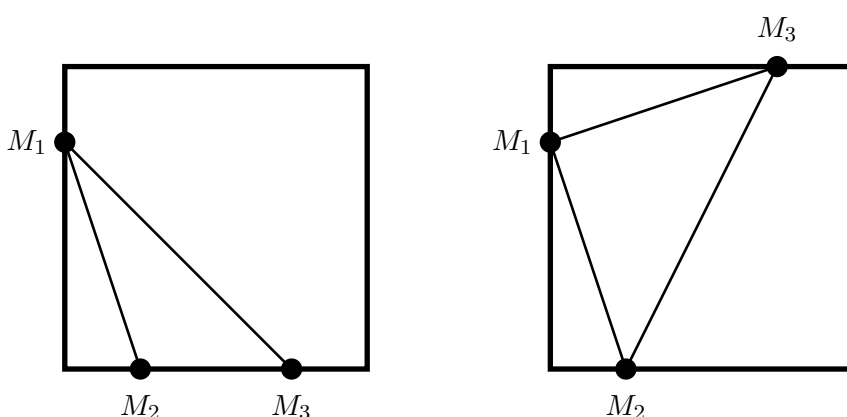


FIG. 5 – 2 configurations possibles (aux rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ près) pour un triangle dont les sommets sont sur les côtés du carré

Pour plus de simplicité dans les calculs d'aire, plaçons l'origine du repère au sommet inférieur gauche du carré.

Dans le premier cas, l'aire du triangle est : $\frac{1}{2}y_1(x_3 - x_2) \leq \frac{a^2}{2}$

Dans le deuxième cas, l'aire du triangle est donnée par la première question de l'exercice :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(M_1M_2M_3) &= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2) \\ &= \frac{1}{2}(ax_2 + x_3y_1 - x_2y_1) \quad \text{avec} \quad 0 \leq x_2, x_3, y_1 \leq a\end{aligned}$$

Pour x_3 et y_1 fixés, l'expression précédente est une fonction affine de x_2 croissante puisque $a - y_1 \geq 0$. Elle atteint donc son maximum pour $x_2 = a$. Ainsi :

$$\mathcal{A}(M_1M_2M_3) \leq \frac{1}{2} [a^2 + y_1(x_3 - a)] \leq \frac{a^2}{2} \quad \text{car} \quad y_1 \geq 0 \text{ et } x_3 - a \leq 0$$

Par conséquent, l'aire de tout triangle inclus dans le carré est inférieure à celle des triangles potentiellement solutions, qui sont donc bien solutions du problème.

Conclusion : L'ensemble des triangles d'aire maximale inclus dans un carré de côté a sont les triangles dont deux sommets coïncident avec deux sommets d'un même côté du carré et le troisième sommet est sur le côté opposé.