Corrigé de l'examen d'Optimisation Non Linéaire

ENAC – 15 juin 2004

1 Connaissance du cours : conditions d'optimalité sous contraintes égalité *(10 points)*

Ce théorème a été démontré en cours dans deux versions plus générales : les conditions nécessaire et suffisante d'optimalité du 1er ordre ainsi que les conditions nécessaire et suffisante d'optimalité du 2ème ordre.

Les définitions ont été également vues en cours.

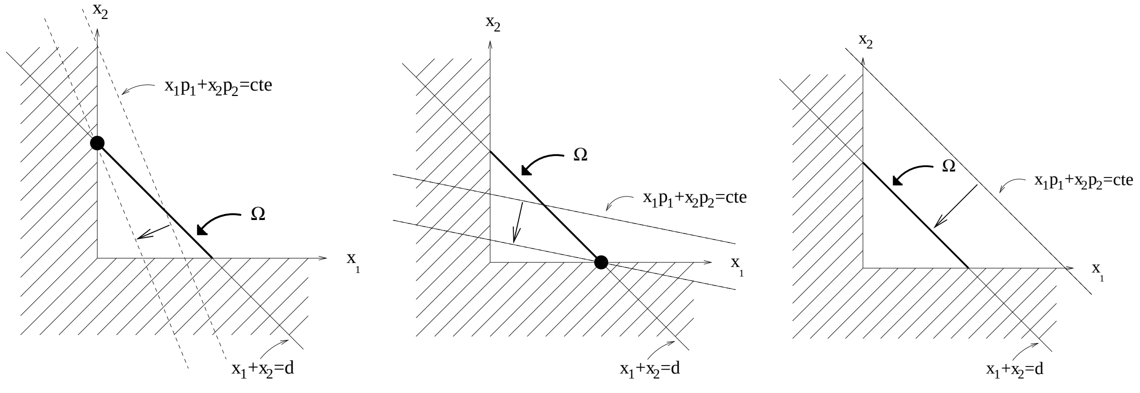
2 Problème : optimisation du prix des billets d'une compagnie aérienne dans un marché concurrentiel *(10 points)*

2.1 Modélisation de la demande des consommateurs sur une destination donnée *(2,5 points)*

2.1.1 Résolution graphique du problème (P) *(0,5 point)*

La droite d'équation $x_1p_1 + x_2p_2 = cte$ descend quand cte diminue. Comme le montrent les dessins (a) et (b) de la figure ci-dessous, on sort du domaine des contraintes à partir du point d'intersection entre la droite d'équation $x_1 + x_2 = d$ et l'axe d'équation $x_1 = 0$ si $p_1 > p_2$ (respectivement $x_2 = 0$ si $p_1 < p_2$).

Lorsque $p_1 = p_2$, la droite d'équation $x_1p_1 + x_2p_2 = cte$ est parallèle à la droite d'équation $x_1 + x_2 = d$ si bien que tous les points (x_1,x_2) du domaine sont solutions du problème (P).



(a) $p_1 > p_2$ (b) $p_2 > p_1$ (c) $p_1 = p_2$

FIG. 1 – *Solution graphique du problème (P) suivant les valeurs relatives de p_1 et p_2*

Ainsi, les différentes solutions possibles de (P) sont :

$$\boxed{\begin{cases} \hat{x}_1 = d \text{ et } \hat{x}_2 = 0 & \text{si} \quad p_1 < p_2 \\ \hat{x}_1 = 0 \text{ et } \hat{x}_2 = d & \text{si} \quad p_1 > p_2 \\ \{(\hat{x}_1,\hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \hat{x}_1 + \hat{x}_2 = d \ , \ \hat{x}_1 \geqslant 0 \ , \ \hat{x}_2 \geqslant 0\} & \text{si} \quad p_1 = p_2 \end{cases}}$$

Remarque : la solution d'un problème d'optimisation d'une fonction linéaire sous contraintes linéaires est toujours à un sommet du polygone défini par les contraintes ; cette propriété est la base d'un algorithme d'optimisation linéaire appelé *simplex*.

2.1.2 Résolution du problème (P) à l'aide des techniques lagrangiennes *(1,5 points)*

Soit $f(x_1,x_2) = x_1p_1 + x_2p_2$, $h_1(x_1,x_2) = -x_1$, $h_2(x_1,x_2) = -x_2$ et $g(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - d$.
Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ h_1(x) \leqslant 0 \ , \ h_2(x) \leqslant 0 \ , \ g(x) = 0\}$.
Les contraintes sont affines donc elles sont qualifiées en tout point du domaine Ω.
Soit $\hat{x}$ un point de Ω solution du problème (P). Les contraintes sont qualifiées en $\hat{x}$ donc la condition nécessaire d'optimalité du 1er ordre s'applique :

$$\exists \ \lambda \in \mathbb{R} \ , \exists \ (\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(\hat{x}) + \mu_1 \dfrac{\partial h_1}{\partial x}(\hat{x}) + \mu_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial x}(\hat{x}) = 0 \\ \mu_1 h_1(x) = 0 \\ \mu_2 h_2(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Soit :} \begin{cases} p_1 + \lambda - \mu_1 = 0 & (1) \\ p_2 + \lambda - \mu_2 = 0 & (2) \\ \mu_1 x_1 = 0 & (3) \\ \mu_2 x_2 = 0 & (4) \\ x_1 + x_2 = d & (5) \end{cases}$$

- 1er cas : $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$
  Alors $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ donc $d = x_1 + x_2 = 0$: impossible par hypothèse
  Donc $\mu_1 = 0$ ou $\mu_2 = 0$
- 2ème cas : $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 0$
  D'après (1) et (2) : $p_1 = p_2 = -\lambda$
  Il reste l'équation $x_1 + x_2 = d$ qui admet une infinité de solutions sous les conditions $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$.
- 3ème cas : $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 = 0$
  $(1) - (2) \Longrightarrow p_1 - p_2 = \mu_1 - \mu_2 = \mu_1 > 0$
  Or $\mu_1 > 0$ donc d'après (3) : $x_1 = 0$
  Puis, d'après (5) : $x_2 = d$

- 4ème cas : symétrique du 3ème cas

D'autre part, f, h_1 et h_2 sont affines donc convexes, et g est affine donc, d'après la condition suffisante d'optimalité du 1er ordre, les solutions obtenues ci-dessus sont bien solutions du problème (P).

Ainsi, les différentes solutions possibles de (P) sont :

$$\boxed{\begin{cases} \hat{x}_1 = d \text{ et } \hat{x}_2 = 0 & \text{si} \quad p_1 < p_2 \\ \hat{x}_1 = 0 \text{ et } \hat{x}_2 = d & \text{si} \quad p_1 > p_2 \\ \{(\hat{x}_1,\hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \hat{x}_1 + \hat{x}_2 = d \ , \ \hat{x}_1 \geqslant 0 \ , \ \hat{x}_2 \geqslant 0\} & \text{si} \quad p_1 = p_2 \end{cases}}$$

2.1.3 Tracé de la fonction $x_2(p_2)$ en considérant p_1 comme paramètre de la fonction *(0,5 point)*

La fonction $x_2(p_2)$ n'est pas définie en p_1 puisque le problème (P) admet une infinité de solutions lorsque $p_1 = p_2$. Ailleurs, la fonction est constante (voir page suivante).

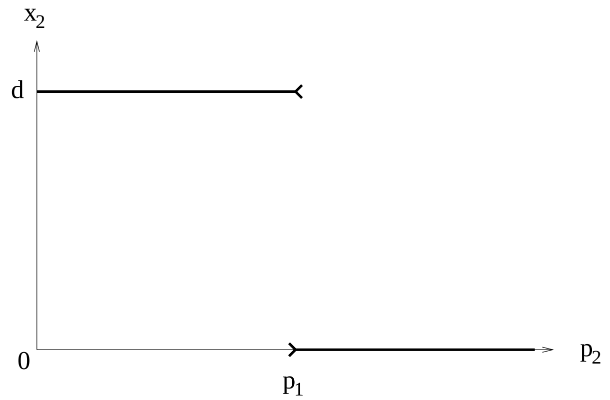


FIG. 2 – *Tracé de x_2 en fonction de p_2 en considérant p_1 comme paramètre*

Lorsque la stratégie des consommateurs consiste à dépenser le moins d'argent possible sans préférence pour une compagnie particulière, la demande est évidemment totale pour la compagnie aérienne qui propose les billets les moins chers. Lorsque les deux compagnies pratiquent le même prix, le choix est impossible puisque les consommateurs n'ont aucune préférence à prix égal.

2.2 Calcul des prix optimaux de la nouvelle compagnie aérienne sous contrainte logistique *(4 points)*

2.2.1 Amélioration du modèle de demande *(0,5 point)*

En réalité, les consommateurs ont une préférence pour une compagnie particulière si bien qu'ils achètent les billets de leur compagnie préférée, même si elle est plus chère que les autres compagnies. Au fur et à mesure que l'écart de prix se creuse, ils sont tout de même de plus en plus nombreux à acheter les billets moins chers d'une compagnie qui n'est pas celle qu'ils préfèrent.

Le modèle de demande proposé dans cette partie est affine et décroissant en fonction du prix du billet :

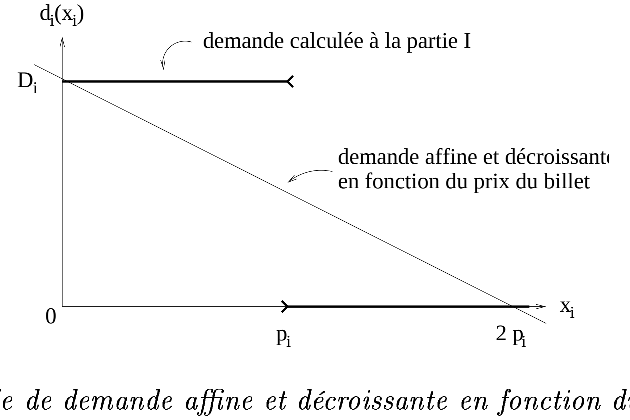


FIG. 3 – *Modèle de demande affine et décroissante en fonction du prix du billet*

La vérification demandée est immédiate : on a bien $d_i(0) = D_i$ car $0 < p_i$ et $d_i(2p_i) = 0$ car $2p_i > p_i$.

2.2.2 Modélisation du problème d'optimisation de prix sous contrainte logistique *(1 point)*

Gain : $\sum_{i=1}^{n} x_i d_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i D_i \left(1 - \frac{x_i}{2p_i}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{p_i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} D_i x_i$

Coût : $f + \sum_{i=1}^{n} c_i d_i(x_i) = f + \sum_{i=1}^{n} c_i D_i \left(1 - \frac{x_i}{2p_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i D_i}{2p_i} x_i + \sum_{i=1}^{n} c_i D_i + f$

Bénéfice = gain - coût : $-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{p_i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} D_i \left(1 + \frac{c_i}{2p_i}\right) x_i - \sum_{i=1}^{n} c_i D_i - f$

Contrainte logistique : $\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i) \leqslant m$ soit $-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{p_i} x_i + \sum_{i=1}^{n} D_i - m \leqslant 0$
Prix des billets non nuls : $x_i > 0$, $i \in [1,n]$
Demandes des consommateurs non nulles : $d_i(x_i) > 0$, $i \in [1,n]$ soit $x_i < 2p_i$, $i \in [1,n]$

Maximiser une fonction revient à minimiser son opposé donc le problème d'optimisation de prix sous contrainte logistique s'écrit :

$$(P') \qquad \min_{\substack{-\frac{1}{2}b^T x + G \leqslant 0 \\ 0 < x_i < 2p_i \ , \ i \in [1,n]}} \frac{1}{2} x^T Q x - a^T x + F$$

avec $Q = \begin{bmatrix} \frac{D_1}{p_i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{D_n}{p_n} \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} D_1\left(1 + \frac{c_1}{2p_1}\right) \\ \vdots \\ D_n\left(1 + \frac{c_n}{2p_n}\right) \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} \frac{D_1}{p_1} \\ \vdots \\ \frac{D_n}{p_n} \end{bmatrix}$, $F = f + \sum_{i=1}^{n} c_i D_i$ et $G = -m + \sum_{i=1}^{n} D_i$

Comme D_i, c_i et p_i sont strictement positifs pour tout i dans $[1,n]$, la matrice Q est diagonale définie positive et les composantes des vecteurs a et b sont strictement positives.

2.2.3 Résolution du problème (P') par la méthode duale *(2,5 points)*

Cette question est identique au deuxième exercice du TD 5 sur la dualité, intitulé *programmation quadratique*. En effet, les contraintes $\{0 < x_i < 2p_i \ , \ i \in [1,n]\}$ définissent un ensemble ouvert qu'il n'est pas nécessaire de prendre en compte dans le lagrangien. Néanmoins, il ne faudra retenir que les solutions qui appartiennent à cet ensemble ouvert.

Remarque : il est possible de tenir compte de ces contraintes dans le lagrangien mais les paramètres de Kuhn-Tucker associés sont toujours nuls puisque ces contraintes ne sont jamais actives...

Soient $J(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - a^T x + F$ et $g(x) = -\frac{1}{2} b^T x + G$.
La contrainte g est affine donc les contraintes sont qualifiées en tout point x du domaine contraint.
De plus, g est affine donc convexe, et Q est définie positive donc J est convexe. Par conséquant, le théorème de la dualité s'applique : $\hat{x}$ est solution du problème (P') si et seulement s'il existe $\hat{\mu} \in \mathbb{R}_+$ tels que $(\hat{x},\hat{\mu})$ est solution du problème dual :

$$(Dual) \qquad \sup_{\mu \geqslant 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x,\mu)$$

avec $L(x,\mu) = J(x) + \mu g(x) = \dfrac{1}{2}x^TQx - a^Tx + F + \mu\left(-\dfrac{1}{2}b^Tx + G\right)$

- $1^{\text{ère}}$ étape : pour $\mu \geqslant 0$ fixé, minimisation sans contrainte de $L(x,\mu)$ par rapport à x

  Si $\hat{x}$ minimise $L(\cdot,\mu)$ alors $\dfrac{\partial L}{\partial x}(\hat{x},\mu) = 0$, soit :

  $$\hat{x}^TQ - a^T - \frac{\mu}{2}b^T = 0 \qquad \text{(Q est symétrique)}$$

  donc $\qquad \hat{x} = Q^{-1}\left(a + \dfrac{\mu}{2}b\right)$

  D'autre part, $L(\cdot,\mu)$ est convexe donc le $\hat{x}$ obtenu est bien minimum de $L(\cdot,\mu)$.
- $2^{\text{ème}}$ étape : mimisation par rapport à μ de $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\mu)$ sous la contrainte $\mu \geqslant 0$

  Soit ψ : $\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mu & \longmapsto & \inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\mu) = L(\hat{x}(\mu),\mu) \end{array}$

  Comme $\hat{x}(\mu) = Q^{-1}\left(a + \dfrac{\mu}{2}b\right)$:

  $\psi(\mu) = \dfrac{1}{2}\left(a^T + \dfrac{\mu}{2}b^T\right)Q^{-1}QQ^{-1}\left(a + \dfrac{\mu}{2}b\right) - a^TQ^{-1}\left(a + \dfrac{\mu}{2}b\right) + F + \mu\left(-\dfrac{1}{2}b^TQ^{-1}\left(a + \dfrac{\mu}{2}b\right) + G\right)$

  L'expression ci-dessus se simplifie en remarquant que Q^{-1} est diagonale donc symétrique et que $b^TQ^{-1}a$ est un réel donc $b^TQ^{-1}a = \left(b^TQ^{-1}a\right)^T = a^T\left(Q^{-1}\right)^Tb = a^TQ^{-1}b$:

  $$\psi(\mu) = -\frac{b^TQ^{-1}b}{8}\mu^2 + \left(G - \frac{a^TQ^{-1}b}{2}\right)\mu + F - \frac{a^TQ^{-1}a}{2}$$

  Calculons le point où s'annule la dérivée de ψ :

  $$\psi'(\mu) = 0 \implies \mu b^TQ^{-1}b = 2(2G - b^TQ^{-1}a)$$

  Or : $Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{D_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{p_n}{D_n} \end{bmatrix} > 0$ et $b \neq 0$ donc $b^TQ^{-1}b > 0$.

  Donc ψ' s'annule en $\dfrac{2}{b^TQ^{-1}b}(2G - b^TQ^{-1}a)$, qui est le point où ψ atteint son maximum sur $\mathbb{R}$ puisque ψ est un polynôme concave du second degré. Cependant, nous cherchons le maximum de ψ sur $\mathbb{R}_+$ et non sur $\mathbb{R}$.
  - <u>1^{er} cas</u> : $2G \geqslant b^TQ^{-1}a$

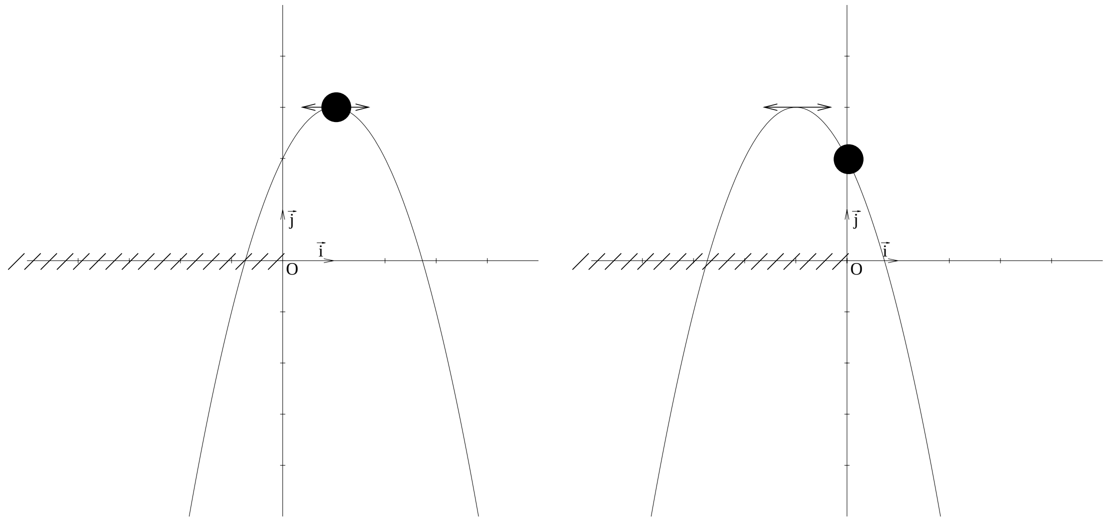
    Alors le point qui annule la dérivée de ψ est positif donc la solution du problème dual est $\hat{\mu} = \dfrac{2}{b^TQ^{-1}b}(2G - b^TQ^{-1}a)$ et $\hat{x}(\hat{\mu}) = Q^{-1}\left(a + \dfrac{2G - b^TQ^{-1}a}{b^TQ^{-1}b}b\right)$.
  - <u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : $2G < b^TQ^{-1}a$

    Alors le point qui annule la dérivée de ψ est strictement négatif. Donc ψ, qui est un polynôme concave du second degré, est décroissante à droite de ce point. En particulier, ψ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc elle atteint son maximum sur $\mathbb{R}_+$ en $\hat{\mu} = 0$ et $\hat{x}(\hat{\mu}) = Q^{-1}a$.

  Les deux cas précédents sont représentés sur la figure de la page suivante.

Ainsi, les solutions possibles du problème (P'), sans tenir compte des contraintes ouvertes $\{x \in \mathbb{R}_n \ : \ 0 < x_i < 2p_i \ , \, i \in [1,n]\}$, sont :

$$\hat{x} = \begin{cases} Q^{-1}\left(a + \dfrac{2G - b^TQ^{-1}a}{b^TQ^{-1}b}b\right) & \text{si} \quad 2G \geqslant b^TQ^{-1}a \\ Q^{-1}a & \text{si} \quad 2G < b^TQ^{-1}a \end{cases}$$



(a) $2G \geqslant b^T Q^{-1} a$ (b) $2G < b^T Q^{-1} a$

FIG. 4 – *Solution de* $\sup\limits_{\mu \geqslant 0} \psi(\mu)$ *suivant le signe de* $2G - b^T Q^{-1} a$

soit, en remplaçant Q, a, b et G par les données du problème, et en prenant en compte les contraintes ouvertes $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 < x_i < 2p_i \ , \ i \in [1,n]\}$, la composante $\hat{x}_i$ de la solution est :

– Si $\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} D_j \left(1 - \dfrac{c_j}{2p_j}\right) \geqslant 2m \\ \text{et} \\ \dfrac{c_i}{2} + \dfrac{-2m + \sum\limits_{j=1}^{n} D_j \left(1 - \dfrac{c_j}{2p_j}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{D_j}{p_j}} < p_i \end{array} \right.$: $\hat{x}_i = p_i + \dfrac{c_i}{2} + \dfrac{-2m + \sum\limits_{j=1}^{n} D_j \left(1 - \dfrac{c_j}{2p_j}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{D_j}{p_j}}$

– Si $\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} D_j \left(1 - \dfrac{c_j}{2p_j}\right) < 2m \\ \text{et} \\ c_i < 2p_i \end{array} \right.$: $\hat{x}_i = p_i + \dfrac{c_i}{2}$

– Sinon : pas de solution

2.3 Calcul des prix optimaux de la nouvelle compagnie aérienne sous contraintes logistique et budgétaires *(3,5 points)*

On reprend les notations du problème (P') précédemment résolu.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et le vecteur $\beta = (b_1, \ldots, b_n)^T$.
Soient les fonctions $h_i(x) = e_i^T(x - \beta)$ pour tout i dans $[1,n]$. Les contraintes budgétaires $\{x_i \leqslant b_i \ , \ i \in [1,n]\}$ s'écrivent $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ h_i(x) \leqslant 0 \ , \ i \in [1,n]\}$.

- Les fonctions h et $(h_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont affines donc les contraintes sont qualifiées en tout point du domaine contraint.
- Soit $\hat{x}$ solution du problème (P') avec les contraintes bugétaires. Les contraintes sont qualifiées en $\hat{x}$ donc la condition nécessaire du 1$^{\text{er}}$ ordre s'applique :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+ \;,\; \exists\,(\mu_1,\dots,\mu_n) \in \mathbb{R}_+^n \;:\; \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial J}{\partial x}(\hat{x}) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(\hat{x}) + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \dfrac{\partial h_i}{\partial x}(\hat{x}) = 0 \\ \lambda h(\hat{x}) = 0 \\ \mu_i h_i(\hat{x}) = 0 \;,\; i \in [1,n] \end{array} \right.$$

soit $\left\{ \begin{array}{l} x^T Q - a^T - \dfrac{\lambda}{2} b^T + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i^T = 0 \\ \lambda(-\dfrac{1}{2} b^T x + G) = 0 \\ \mu_i (x_i - b_i) = 0 \;,\; i \in [1,n] \end{array} \right.$

Ainsi, en notant $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)^T$: $\hat{x} = Q^{-1}\left(a + \dfrac{\lambda}{2} b - \mu\right)$

- 1^er^ cas : $\lambda = 0$
  Alors $\hat{x} = Q^{-1}(a - \mu)$
  En renumérotant les vecteurs de la base canonique, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_i = 0$ pour tout i dans $[1,k]$ et $\mu_i > 0$ pour tout i dans $[k+1,n]$. Les ensembles $[1,k]$ et $[k+1,n]$ sont éventuellement vides si, respectivement, $k = 0$ ou $k \geqslant n$.
  Comme $\mu_i(x_i - b_i) = 0$ pour tout i dans $[1,n]$: $x_i = b_i$ pour tout i dans $[k+1,n]$.
  Ainsi, en remplaçant Q et a par les données du problème :

$$\hat{x}_i = \left\{ \begin{array}{lll} p_i + \dfrac{c_i}{2} & \text{si} & 1 \leqslant i \leqslant k \\ b_i & \text{si} & k < i \leqslant n \end{array} \right.$$

  Or $\mu = a - Q\hat{x}$ donc $\mu_i = \dfrac{D_i}{p_i}\left(p_i + \dfrac{c_i}{2} - b_i\right)$ pour tout i dans $[k+1,n]$.
  Cette solution est possible si $h(\hat{x}) \leqslant 0$, $h_i(\hat{x}) \leqslant 0$ pour tout i dans $[1,k]$, $\mu_i > 0$ pour tout i dans $[k+1,n]$ et $0 < \hat{x}_i < 2p_i$ pour tout i dans $[1,n]$.

  - $h_i(\hat{x}) \leqslant 0 \;,\; 0 < \hat{x}_i < 2p_i$ et $\mu_i > 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} p_i + \dfrac{c_i}{2} \leqslant b_i \text{ et } c_i < 2p_i & \text{si} & 1 \leqslant i \leqslant k \\ p_i + \dfrac{c_i}{2} > b_i \text{ et } b_i < 2p_i & \text{si} & k < i \leqslant n \end{array} \right.$
  - $h(\hat{x}) \leqslant 0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k} D_i\left(1 + \dfrac{c_i}{2p_i}\right) - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=k+1}^{n} \dfrac{D_i b_i}{p_i} + \sum\limits_{i=1}^{n} D_i \leqslant m$
    $\Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} D_i\left(1 - \dfrac{c_i}{2p_i}\right) + 2\sum\limits_{i=k+1}^{n} D_i\left(1 - \dfrac{b_i}{2p_i}\right) \leqslant 2m$

- 2^ème^ cas : $\lambda > 0$
  On procède comme dans le 1^er^ cas : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_i = 0$ pour tout i dans $[1,k]$ et $\mu_i > 0$ pour tout i dans $[k+1,n]$. Ainsi :

$$\hat{x}_i = \left\{ \begin{array}{lll} p_i + \dfrac{c_i}{2} + \dfrac{\lambda}{2} & \text{si} & 1 \leqslant i \leqslant k \\ b_i & \text{si} & k < i \leqslant n \end{array} \right.$$

  Or $\lambda > 0$ donc $h(\hat{x}) = 0$, soit :

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{D_i}{p_i}\left(p_i + \frac{c_i}{2} + \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{n} \frac{D_i b_i}{p_i} + \sum_{i=1}^{n} D_i = m$$

  - Si $k = 0$ (toutes les contraintes budgétaires son actives) alors $\hat{x} = (b_1,\dots,b_n)^T$ est solution du problème (P') si $\sum\limits_{i=1}^{n} D_i\left(1 - \dfrac{b_i}{2p_i}\right) = m$

- Sinon : $\lambda = 2\dfrac{-2m + \sum\limits_{i=1}^{k} D_i\left(1-\dfrac{c_i}{2p_i}\right) + 2\sum\limits_{i=k+1}^{n} D_i\left(1-\dfrac{b_i}{2p_i}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{D_i}{p_i}}$

Ainsi, pour $i \in [1,k]$: $\hat{x}_i = p_i + \dfrac{c_i}{2} + \dfrac{-2m + \sum\limits_{j=1}^{k} D_j\left(1-\dfrac{c_j}{2p_j}\right) + 2\sum\limits_{j=k+1}^{n} D_j\left(1-\dfrac{b_j}{2p_j}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{D_j}{p_j}}$

De plus, $\mu = a + \dfrac{\lambda}{2}b - Q\hat{x}$ donc pour $i \in [k+1,n]$:

$$\mu_i = \frac{D_i}{p_i}\left(p_i + \frac{c_i}{2} - b_i + \frac{-2m + \sum\limits_{j=1}^{k} D_j\left(1-\dfrac{c_j}{2p_j}\right) + 2\sum\limits_{j=k+1}^{n} D_j\left(1-\dfrac{b_j}{2p_j}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{D_j}{p_j}}\right)$$

Cette solution est possible si $\lambda > 0$, $h_i(\hat{x}) \leqslant 0$ pour tout i dans $[1,k]$, $\mu_i > 0$ pour tout i dans $[k+1,n]$ et $0 < \hat{x}_i < 2p_i$ pour tout i dans $[1,n]$.

- $\lambda > 0 \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} D_i\left(1-\dfrac{c_i}{2p_i}\right) + 2\sum\limits_{i=k+1}^{n} D_i\left(1-\dfrac{b_i}{2p_i}\right) > 2m$
- $h_i(\hat{x}) \leqslant 0$ et $0 < \hat{x}_i < 2p_i$, $i \in [1,k]$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} p_i + \dfrac{c_i}{2} + \dfrac{-2m + \sum\limits_{j=1}^{k} D_j\left(1-\dfrac{c_j}{2p_j}\right) + 2\sum\limits_{j=k+1}^{n} D_j\left(1-\dfrac{b_j}{2p_j}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{D_j}{p_j}} \leqslant b_i \\ \text{et} \\ \dfrac{c_i}{2} + \dfrac{-2m + \sum\limits_{j=1}^{k} D_j\left(1-\dfrac{c_j}{2p_j}\right) + 2\sum\limits_{j=k+1}^{n} D_j\left(1-\dfrac{b_j}{2p_j}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{D_j}{p_j}} < p_i \end{array}\right.$$

- $\mu_i > 0$ et $0 < \hat{x}_i < 2p_i$, $i \in [k+1,n]$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} p_i + \dfrac{c_i}{2} + \dfrac{-2m + \sum\limits_{j=1}^{k} D_j\left(1-\dfrac{c_j}{2p_j}\right) + 2\sum\limits_{j=k+1}^{n} D_j\left(1-\dfrac{b_j}{2p_j}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{D_j}{p_j}} > b_i \\ \text{et} \\ b_i < 2p_i \end{array}\right.$$

D'autre part, f est convexe, h et les fonctions $(h_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont affines donc convexes. Ainsi, d'après la condition suffisante d'optimalité du 1er ordre, les solutions obtenues ci-dessus sont bien solutions du problème (P').

La page suivante présente un bilan des solutions possibles de (P').

– Si $\sum\limits_{i=1}^{n} D_i\left(1-\dfrac{b_i}{2p_i}\right)=m$ et $b_i<2p_i$, $i\in[1,n]$ alors $\hat{x}=(b_1,\ldots,b_n)^T$

– S'il existe k dans $[1,n]$ tel que, après renumérotation éventuelle de la base canonique :

$$\left\{\begin{array}{l} p_i+\dfrac{c_i}{2}\leqslant b_i \text{ et } c_i<2p_i \text{ , } i\in[1,k] \\ \text{et} \\ p_i+\dfrac{c_i}{2}>b_i \text{ et } b_i<2p_i \text{ , } i\in[k+1,n] \\ \text{et} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} D_i\left(1-\dfrac{c_i}{2p_i}\right)+2\sum\limits_{i=k+1}^{n} D_i\left(1-\dfrac{b_i}{2p_i}\right)\leqslant 2m \end{array}\right.$$

$$\text{alors} \qquad \hat{x}_i=\left\{\begin{array}{lll} p_i+\dfrac{c_i}{2} & \text{si} & 1\leqslant i\leqslant k \\ b_i & \text{si} & k<i\leqslant n \end{array}\right.$$

– S'il existe k dans $[1,n]$ tel que, après renumérotation éventuelle de la base canonique :

$$\left\{\begin{array}{l} p_i+\dfrac{c_i}{2}+\dfrac{-2m+\sum\limits_{j=1}^{k} D_j\left(1-\dfrac{c_j}{2p_j}\right)+2\sum\limits_{j=k+1}^{n} D_j\left(1-\dfrac{b_j}{2p_j}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{D_j}{p_j}}\leqslant b_i \text{ , } i\in[1,k] \\ \text{et} \\ \dfrac{c_i}{2}+\dfrac{-2m+\sum\limits_{j=1}^{k} D_j\left(1-\dfrac{c_j}{2p_j}\right)+2\sum\limits_{j=k+1}^{n} D_j\left(1-\dfrac{b_j}{2p_j}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{D_j}{p_j}}<p_i \text{ , } i\in[1,k] \\ p_i+\dfrac{c_i}{2}+\dfrac{-2m+\sum\limits_{j=1}^{k} D_j\left(1-\dfrac{c_j}{2p_j}\right)+2\sum\limits_{j=k+1}^{n} D_j\left(1-\dfrac{b_j}{2p_j}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{D_j}{p_j}}>b_i \text{ , } i\in[k+1,n] \\ \text{et} \\ b_i<2p_i \text{ , } i\in[k+1,n] \\ \text{et} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} D_i\left(1-\dfrac{c_i}{2p_i}\right)+2\sum\limits_{i=k+1}^{n} D_i\left(1-\dfrac{b_i}{2p_i}\right)>2m \end{array}\right.$$

$$\text{alors} \qquad \hat{x}_i=\left\{\begin{array}{lll} p_i+\dfrac{c_i}{2}+\dfrac{-2m+\sum\limits_{j=1}^{k} D_j\left(1-\dfrac{c_j}{2p_j}\right)+2\sum\limits_{j=k+1}^{n} D_j\left(1-\dfrac{b_j}{2p_j}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{D_j}{p_j}} & \text{si} & 1\leqslant i\leqslant k \\ b_i & \text{si} & k<i\leqslant n \end{array}\right.$$

– Sinon, pas de solution