Examen d'Optimisation Non-Linéaire

IENAC06 - 06 juin 2007

Documents autorisés : une feuille manuscrite recto-verso.
Matériel autorisé : aucun.

1 Question de cours : direction admissible

[2 points] Soit un problème d'optimisation sous contraintes (P_Ω) : $\min\limits_{x\in\Omega} f(x)$ où Ω désigne le domaine défini par les contraintes. Soit x un point de Ω. Donner la définition d'une direction admissible en x.

2 Exercice : une fonction vue en cours ...

Dans cet exercice, on s'intéresse à une fonction mentionnée en cours afin de visualiser la différence entre la différentiabilité au sens de Gâteaux et la différentiabilité au sens de Fréchet.

1. *[2 points]* Rappeler la définition de la différentiabilité au sens de Gâteaux et celle de la différentiabilité au sens de Fréchet. Expliquer la différence entre les deux et rappeler pourquoi l'existence d'une dérivée de Fréchet de la fonction f en x implique la continuité de f en x.

2. *[2 points]* Soit la fonction : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   f est-elle différentiable au sens de Gâteaux en $(0,0)$? Si oui, quelle est sa dérivée de Gâteaux ?

3. *[1 point]* Pourquoi f n'est-elle pas différentiable au sens de Fréchet ?

3 Problème : survie à la préhistoire !

Le chef d'une tribu de dinosaures se demande comment organiser son camp pour assurer la survie de son espèce (pour les besoins de l'expérience, nous considérerons des dinosaures civilisés et organisés). Il doit notamment décider de la quantité de nourriture y qu'il donne à chacun par hiver (dans la limite du stock disponible) et du nombre x de dinos qu'il envoie chasser en été pour faire les stocks d'hiver. Il sait que ceux qui restent au camp participent au renouvellement de la population et sont caractérisés par un taux de natalité ρ qui caractérise le nombre d'oeufs pondus par dino et qui vont éclore. Comme il est sage, qu'il connait bien son environnement et qu'il maîtrise les techniques d'optimisation non-linéaire, il décide de modéliser son problème avec les hypothèses suivantes :

- Pour le renouvellement de la population, on suppose qu'on a la mixité, et on ne distingue pas les dinosaures masculins et les féminins (ni les couples) : on dit juste que n dinosaures pondent des oeufs dont ρn écloront au printemps suivant.
- Comme l'espèce est nombreuse, on suppose que x est un réel (et non un entier). Pour envoyer chasser 0.5 dinosaure, le chef lui demandera de chasser à mi-temps.
- On sait que l'espèce comprend initialement N individus.
- Il y a beaucoup de bêtes sauvages plus puissantes que nos dinosaures autour du camp et cela provoque un taux de survie d parmi les dinos chasseurs ($(1-d)x$ morts pour x chasseurs).
- Le chef estime que t chasseurs couvrent un territoire de surface $E\dfrac{t}{t+1}$ où E est un réel strictement positif représentant l'efficacité des chasseurs et la surface maximale explorable.
- Il estime enfin que si les chasseurs qui survivent couvrent une surface S, il collecteront une quantité $A \times S$ de nourriture, A étant un réel strictement positif décrivant l'abondance de gibier sur les terres.
- Par ailleurs, le chef sait qu'il doit envoyer un nombre strictement positif de chasseurs pour donner l'impression qu'il défend le territoire et donc il sait que $x > 0$.
- Enfin, le dinosaure-sage du camp, nutritionniste à ses heures, indique au chef la quantité minimum de nourriture Y à fournir à un individu pour qu'il survive à l'hiver.

Le chef schématise le déroulement d'une année de la façon suivante :

Phase 1 Pendant le printemps et l'été, les dinosaures du village chassent et rapportent un stock de nourriture.

Phase 2 Pendant l'hiver, on consomme le stock avec des rations de y parts de nourriture par personne et, si le stock n'est pas suffisant, certains meurent de faim. Donc au terme de l'hiver, si le stock n'était pas suffisant à l'origine, il y a $\dfrac{\text{stock}}{y}$ survivants.

Phase 3 A la fin de l'hiver les oeufs éclosent, les bébés naissent et sont immédiatement considérés comme adultes.

Le raisonnement du chef suit les étapes suivantes :

1. *[2 points]* Ecrire les états successifs p_1, p_2 et p_3 de la population, correspondant respectivement aux fins des phases 1, 2 et 3, en fonction des variables du problème.
2. On pose $k = A \times E$ et on suppose que le chef a décidé d'une valeur y_0 pour y.
   (a) *[1 point]* Expliquer ce que représente physiquement le paramètre $k = AE$, puis ce que représente $\dfrac{k}{y_0}$.
   (b) *[1 point]* Tracer l'allure de la fonction $p_2(x)$ sur le domaine $x \in [0; N]$. On distinguera deux cas selon que $Nd + 1$ est plus ou moins grand que $\dfrac{AE}{y_0}$.

(c) *[1 point]* En déduire l'expression de $p_2(x)$ sur le domaine $x \in [0, N]$.
Indication : On admettra que l'équation $N-(1-d)x = \frac{AE}{y_0}\frac{xd}{xd+1}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ qu'on ne calculera pas et qu'on notera α. On pourra utiliser α pour répondre à la question précédente. On admettra également qu'α décroit quand k croit (ça sera utile à la question suivante).

3. Dans la suite, on suppose que la terre de la tribu est pauvre en gibier, donc que k est petit et donc que α est grand. Le chef de la tribu suppose que $N < \alpha$ (ce qui est équivalent au critère mis en évidence à la question 2b).

   (a) *[1 point]* Utiliser cette information pour simplifier p_2 et p_3.

   (b) *[2 points]* Ecrire le problème de maximisation de la population finale p_3 sous la forme d'un problème d'optimisation non linéaire que l'on mettra sous la forme :

$$(P) : \begin{cases} \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} ax - \frac{b}{y}\frac{cx}{cx+1} + K \\ h_1(y) \leq 0 \\ h_2(x) \leq 0 \\ m_1(x) < 0 \end{cases}$$

   (on identifiera les paramètres a, b, c, K et les fonctions h_1, h_2, m_1)

4. *[4 points]* Résoudre ce problème à l'aide du théorème de Kuhn et Tucker.
Indication : pour la condition du second ordre, on calculera la Hessien et on montrera que ses deux valeurs propres sont de signe opposé ce qui permettra de ne garder qu'un candidat à l'optimalité. On admettra alors qu'il s'agit bien d'un minimum.

5. *[1 point]* Expliquer par une considération physique pourquoi on pouvait s'attendre à ne trouver des solutions que pour $y = Y$.

6. *[question bonus]* Le chef décide enfin de raffiner son modèle et découvre que mieux on nourrit les mères, plus le taux de natalité augmente. Il modélise cela comme : $\rho(y) = \rho_0 + r \times y$ pour $y \in [Y; Y_{max}]$ avec ρ_0 et r deux réels positifs. En partant du problème (P) écrit précédemment, écrire le nouveau problème (P'). Quel effet sur le résultat peut avoir cette modification de l'énoncé ?