Connaissance du cours *(10 points)*

Conditions d'optimalité sous contraintes égalité

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Soient n et q deux entiers strictement positifs tels que $n > q$.
Soient f et $(g_1, \ldots, g_q)$ des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et le problème d'optimisation sous contraintes égalité suivant :

$$(P_\Omega) \qquad \min_{x \in \Omega} f(x) \text{ avec } \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0 \ , \ 1 \leqslant i \leqslant q\}$$

On note $\mathcal{D}_{\hat{x}}(\Omega)$ l'ensemble des directions admissibles en $\hat{x} \in \Omega$. On suppose que les contraintes sont qualifiées en $\hat{x} \in \Omega$.

- Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre :
  Si $\hat{x}$ est une solution de (P_Ω) alors il existe $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_q)^T \in \mathbb{R}^q$ tel que $\dfrac{\partial L}{\partial x}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0$.
  De plus, $\hat{\lambda}$ est unique si les contraintes sont régulières en $\hat{x}$.
- Condition suffisante d'optimalité du second ordre :
  S'il existe $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ tel que $\dfrac{\partial L}{\partial x}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0$ et si $v^T \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{\lambda}) \ v > 0$ pour tout $v \in \mathcal{D}_{\hat{x}}(\Omega) \setminus \{0\}$ alors $\hat{x}$ est une solution stricte de (P_Ω).

1 Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre *(5 points)*

Soit $\hat{x}$ une solution de (P_Ω).

1. *Donner la définition du lagrangien $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$. (0,5 point)*
2. *Donner la définition de la régularité des contraintes en $\hat{x}$. (0,5 point)*
3. *Donner la définition d'une direction admissible $v \in \mathcal{D}_{\hat{x}}(\Omega)$ en $\hat{x} \in \Omega$. (0,5 point)*
4. On rappelle que les contraintes sont qualifiées en $\hat{x} \in \Omega$ si, par définition :
   $\mathcal{D}_{\hat{x}}(\Omega) = Ker\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(\hat{x})\right)$ où $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ x & \longmapsto & [g_1(x), \ldots, g_q(x)]^T \end{array}$.
   Des deux inclusions suivantes, qu'on ne demande pas de démontrer, quelle est celle qui permet de démontrer le théorème énoncé dans l'en-tête (expliquer brièvement) :
   $\mathcal{D}_{\hat{x}}(\Omega) \subset Ker\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(\hat{x})\right)$ *ou* $Ker\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(\hat{x})\right) \subset \mathcal{D}_{\hat{x}}(\Omega)$ *? (1 point)*
5. Soient φ une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $\varphi(0) = \hat{x}$ et $\varphi(t) \in \Omega$ pour tout $t > 0$ petit, et ψ une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 définie par $\psi = f \circ \varphi$.
   Démontrer que $\psi'(0) = 0$. (0,5 point)

6. *En déduire que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}) \in \left(Ker\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(\hat{x})\right)\right)^{\perp}$*, c'est-à-dire que :*

$$\forall\, v \in Ker\left(\frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x})\right)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x})\cdot v = 0 \qquad \textit{(1,5 points)}$$

7. On rappelle le théorème d'algèbre linéaire suivant :
   Si M est une matrice de $\mathbb{R}^{q\times n}$ alors $(Ker(M))^{\perp} = Im\left(M^T\right)$.
   Déduire des questions précédentes qu'il existe $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ *tel que* $\dfrac{\partial L}{\partial x}(\hat{x},\hat{\lambda}) = 0$ *et que* $\hat{\lambda}$ *est unique si les contraintes sont régulières en* $\hat{x}$*. (0,5 point)*

2 Condition suffisante d'optimalité du second ordre *(5 points)*

On suppose qu'il existe $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ tel que $\dfrac{\partial L}{\partial x}(\hat{x},\hat{\lambda}) = 0$ et que $v^T\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\hat{x},\hat{\lambda})\ v > 0$ pour tout $v \in \mathcal{D}_{\hat{x}}(\Omega)\setminus\{0\}$. On se propose de démontrer par contraposée que $\hat{x}$ est une solution locale stricte de (P).

1. On suppose que $\hat{x}$ n'est pas une solution locale stricte de (P).
   Construire une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *d'éléments de* Ω *qui converge vers* $\hat{x}$ *et telle que* $f(y_k) \leqslant f(\hat{x})$ *pour tout* $k \geqslant 1$*. (0,5 point)*
2. Soit la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*\ ,\ v_k = \frac{y_k - \hat{x}}{\|y_k - \hat{x}\|}$$

   Démontrer qu'on peut extraire de la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *une sous-suite* $\left(v_{\gamma(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *qui converge vers un vecteur* $v_\infty \in Ker\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(\hat{x})\right)\setminus\{0\}$*. (2 points)*
   Indication : appliquer le théorème de Taylor à l'ordre 1 pour la fonction g *aux points* $y_{\gamma(k)}$, $k \geqslant 1$.
3. *En appliquant le théorème de Taylor à l'ordre 2 pour les fonctions* f *et* g*, démontrer que* $v_\infty^T\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\hat{x},\hat{\lambda})\ v_\infty \leqslant 0$*. (2 points)*
4. *Déduire des questions précédentes que* $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\hat{x},\hat{\lambda})$ *n'est pas définie positive sur* $\mathcal{D}_{\hat{x}}(\Omega)\setminus\{0\}$*. (0,5 point)*

Problème *(10 points)*

Optimisation du prix des billets d'une compagnie aérienne dans un marché concurrenciel

Une compagnie aérienne dessert seule n destinations. Une deuxième compagnie aérienne souhaite s'insérer sur ce marché, c'est-à-dire qu'elle veut desservir les mêmes destinations que la première compagnie aérienne. L'objectif de ce problème est de déterminer les prix de la nouvelle compagnie sur chaque destination afin de maximiser son bénéfice, connaissant les prix pratiqués par l'ancienne compagnie.

La première partie vise à modéliser la demande des consommateurs en billets de chaque compagnie sur une destination donnée. Dans la deuxième partie, les prix de la nouvelle compagnie seront déterminés en fonction du nombre maximal de passager que la nouvelle compagnie peut accepter (contrainte logistique de la compagnie). Enfin, nous considérerons dans une troisième partie les limites budgétaires des consommateurs au-delà desquelles ils n'achètent plus de billets, devenus trop chers pour eux (contraintes budgétaires des passagers).

1 Modélisation de la demande des consommateurs sur une destination donnée *(2,5 points)*

On considère une destination desservie par deux compagnies aériennes dont les prix des billets sur cette destination sont p_1 et p_2. La demande totale en billets est de $d > 0$.
On souhaite déterminer les nombres de billets x_1 et x_2 achetés par les consommateurs en supposant que la stratégie globale des consommateurs vise à réduire la dépense totale de l'achat des billets. Le problème à résoudre est donc le suivant :

$$(P) \qquad \min_{\substack{x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 = d}} \quad x_1 p_1 + x_2 p_2$$

1. *Résoudre graphiquement le problème (P) en distinguant 3 cas. (0,5 point)*
2. *Résoudre le problème (P) à l'aide des techniques lagrangiennes. (1,5 point)*
3. *Tracer la fonction $x_2(p_2)$ en considérant p_1 comme paramètre de la fonction. (0,5 point)*

2 Calcul des prix optimaux de la nouvelle compagnie aérienne sous contrainte logistique *(4 points)*

On note $(p_1, \ldots, p_n)$ les prix des billets de la première compagnie sur chaque destination. On suppose que ces prix sont fixés et strictement positifs. On souhaite déterminer les prix optimaux $(x_1, \ldots, x_n)$ des billets de la nouvelle compagnie aérienne sur ces mêmes destinations.

1. En réalité, la demande des consommateurs en billets de la nouvelle compagnie aérienne sur une destination donnée, calculée dans la partie 1, est continue et définie pour tout prix. On suppose donc que la demande sur la destination i, définie sur $\mathbb{R}_+$, est affine et qu'elle décroît en fonction du prix x_i :

$$d_i(x_i) = \begin{cases} D_i\left(1 - \dfrac{x_i}{2p_i}\right) & \text{si} \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 2p_i \\ 0 & \text{si} \quad x_i \geqslant 2p_i \end{cases}$$

en notant $D_i > 0$ la demande totale (pour les deux compagnies) en billets sur la destination i.
Vérifier que la demande en billets pour la nouvelle compagnie sur la destination i correspond à celle de la demande théorique calculée dans la partie 1 pour $x_i = 0$ et $x_i = 2p_i$. (0,5 point)

2. La nouvelle compagnie aérienne souhaite maximiser son bénéfice sur l'ensemble des destinations desservies sans faire de surbooking, c'est-à-dire qu'elle ne vendra pas plus de $m > 0$ billets sur l'ensemble des destinations. Le coût d'exploitation de la compagnie engendre un coût fixe global $f > 0$ ainsi qu'un coût $c_i > 0$ par passager sur chaque destination. Elle souhaite également que les prix de ses billets ainsi que la demande des consommateurs en ses billets soient non nuls.
Montrer qu'il existe une matrice diagonale Q de $\mathbb{R}^{n\times n}$ définie positive, des vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont strictements positives, et des réels F et G tels que les prix optimaux $x = (x_1,\dots,x_n)^T$ de la nouvelle compagnie sont solutions du problème suivant (1 point) :

$$(P') \quad \min_{\substack{-\frac{1}{2}b^T x + G \leqslant 0 \\ 0 < x_i < 2p_i \ ,\ i \in [1,n]}} \frac{1}{2}x^T Q x - a^T x + F$$

3. *Résoudre le problème (P') par la méthode duale. Exprimer les différentes solutions possibles en fonction des données du problème. (2,5 points)*

3 Calcul des prix optimaux de la nouvelle compagnie aérienne sous contraintes logistique et budgétaires *(3,5 points)*

La résolution du problème (P') ne tient pas compte des contraintes budgétaires des consommateurs. Ainsi, les deux compagnies aériennes peuvent pratiquer des prix infinis puisque les consommateurs achètent toujours globalement D_i billets sur chaque destination.

En réalité, le budget de chaque consommateur est limité par une constante $b_i > 0$ sur chaque destination. La solution obtenue dans la partie 2 n'étant pas réaliste, on souhaite ajouter les contraintes budgétaires $\{x_i \leqslant b_i \ ,\ i \in [1,n]\}$.
Résoudre le problème (P') par la méthode directe en ajoutant les contraintes budgétaires $\{x_i \leqslant b_i \ ,\ i \in [1,n]\}$. On notera λ le paramètre de Kuhn-Tucker associé à la contrainte logistique et $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ les paramètres de Kuhn-Tucker associés aux contraintes budgétaires. Exprimer les différentes solutions possibles en fonction des données du problème.