Examen de rattrapage d'Optimisation Non-Linéaire

IENAC06 - 30 août 2007

1 Question de cours : Théorème de la dualité

[2 points] Rappeler la définition d'un point selle d'une fonction multi-variables.
[2 points] Rappeler l'énoncé du théorème de la dualité.

2 Problème : Une histoire de petit déjeuner

Une usine d'une grande marque d'emballages doit produire un revêtement isotherme destiné à être collé sur des briques de lait. Les ingénieurs du bureau-de-conception-des-briques, maîtrisent bien les techniques de fabrication de la structure parallélépipédique des briques et savent en fabriquer de toutes les dimensions. Leur problème se situe plus au niveau du revêtement qui sera collé par dessus la structure de la brique, en effet, le matériau de celui-ci coûte cher et il faut en utiliser la surface minimum afin de pouvoir renvoyer les chutes chez le fournisseur qui les reprend pour une petite somme. Par ailleurs, la machine à découper les feuilles de revêtement fournies ne peut découper que des formes en T (voir figure 1). Enfin le fournisseur ne produit que des feuilles de revêtement de dimension donnée : $a = 4$ et $b = 2.5$. Le volume de la brique $V_0 = 1$ est la seule grandeur qui soit imposée aux ingénieurs pour concevoir leur brique, ils peuvent donc lui donner les dimensions qu'ils souhaitent.

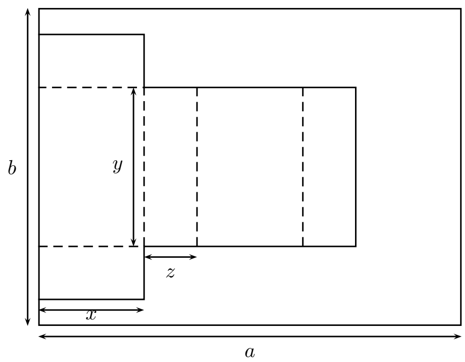

Figure 1: Exemple de plan de découpe

1. *[1 point]* Ecrire le problème de dimensionnement de la brique sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes d'une fonction non-linéaire. On identifiera tout particulièrement les fonctions suivantes :

   - La fonction f à optimiser
   - La contrainte égalité g
   - La contrainte inégalité h_a portant sur la dimension a
   - La contrainte inégalité h_b portant sur la dimension b

2. *[2 points]* Expliquer pourquoi il n'est pas nécessaire de rajouter de contraintes du type $x \geq x_0$, $y \geq y_0$, $z \geq z_0$ pour que le problème soit réaliste.
   Peut-on se passer des contraintes $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$?

   On va tenter une résolution à l'aide du théorème de Kuhn et Tucker. Les questions suivantes déroulent le raisonnement standard fait en cours et en TD, elles ne sont là que pour vous guider et vous éviter des calculs inutiles.
   Sauf aux endroits où le contraire est explicitement mentionné, utilisez les notations a, b et V_0 pour les constantes du problèmes et non leurs valeurs numériques.

3. *[2 points]* Montrer que les contraintes sont qualifiées partout dans le domaine admissible.

4. *[2 points]* Donner les équations découlant de la condition d'optimalité du premier ordre.
   Calculer également le Hessien du Lagrangien. Quel commentaire peut-on faire sur ce Hessien quant à l'optimalité des solutions que l'on va trouver ?

5. *[2 points]* On notera dans la suite μ_a le paramètre de Kuhn et Tucker associé à la contrainte h_a, μ_b celui associé à h_b et λ le paramètre de Lagrange associé à g.
   Résoudre le cas $\mu_a = \mu_b = 0$. A quoi correspond-il physiquement ? A quoi correspond sa solution ?

6. *[2 points]* Pour le cas "$\mu_a = 0$". Exprimer x, y et z en fonction de λ (on pourra, si besoin est, utiliser le fait que $b = 2.5$ mais ne remplacez pas b par sa valeur dans la présentation des résultats).
   Indiquer comment on trouve l'équation que doit vérifier λ (inutile d'écrire cette équation, elle est un peu longue ...)
   Quelle condition μ_b doit-il vérifier ? Sans expliciter le calcul : est-ce toujours le cas ?
   [points bonus] L'équation précédente sur λ semble difficile à résoudre. Expliquer pourquoi.
   Rappeler ou proposer une méthode numérique pour résoudre ce cas.

7. *[2 points]* Pour le cas "$\mu_b = 0$" en utilisant la dérivée du Lagrangien sur y et la contrainte h_a, chercher une solution pour z en fonction de λ et en déduire une condition sur λ pour qu'une telle solution existe.
   Quelle condition μ_a doit-il vérifier ? Sans expliciter le calcul : est-ce toujours le cas ?
   Le calcul de la solution dans ce cas débouche sur le même genre de problèmes qu'à la question précédente, on arrête donc le calcul ici.

8. *[2 points]* Pour le cas où les deux contraintes sont saturées, remplacer a, b et V_0 par leurs valeurs et montrer qu'il existe une solution au problème (suggestion : commencez par chercher la valeur de z et utilisez l'indication).
   Montrer qu'il n'y a qu'une solution dans ce cas et donner les valeurs de x, y et z correspondantes.
   Indication : Le polynôme $2X^3 - 6.5X^2 + 5X - 1$ admet trois racines réelles distinctes valant chacune (valeur approchée à 10^-6 près) : 0.320044, 0.700861 et 2.2291.

9. *[1 point]* En utilisant le Hessien calculé à la question 4, indiquer si on peut conclure à l'optimalité de la solution précédente (ne pas vérifier l'optimalité).

10. *[points bonus]* Avec les résultats des questions précédentes, conclure quant à l'impact des contraintes sur le problème et sur les limites de l'approche analytique.
    Proposer les grandes lignes d'une méthode de résolution que les ingénieurs laitiers pourraient mettre en oeuvre.