Examen d'Optimisation Non Linéaire
ENAC – 9 juin 2005

Exercice : Théorème de la dualité

Soient deux nombres entiers $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \geqslant 2$, des réels $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ et un nombre réel $\alpha > 0$.
Soit le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^p \qquad \text{où} \quad \Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^p \leqslant \alpha \right\}$$

1. Résoudre graphiquement le problème $(\mathcal{P})$ dans le cas $n = p = 2$ en distinguant 3 cas.
2. Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par :

   $$\forall\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\ ,\ m_{ij} = 1$$

   Montrer que M est positive.
3. En déduire une condition suffisante sur p pour que le problème $(\mathcal{P})$ puisse être résolu avec le théorème de la dualité.
4. Résoudre le problème $(\mathcal{P})$ dans le cas général ($(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $p \geqslant 2$) **en utilisant le théorème de la dualité**.

Problème : Optimisation de la structure d'un raidisseur en aéronautique

1 Présentation du problème

Dans le domaine de la résistance des matériaux, le cloquage est la tendance qu'à une poutre sollicitée en compression à former localement des cloques qui déforment et fragilisent le matériau. Afin de diminuer les risques de cloquage, des poutres en forme de I (cf. figure 1), appelées ¡¡raidisseur en I¿¿, sont souvent fixées sous la plaque et perpendiculairement à celle-ci. Ainsi, les raidisseurs en I sont largement utilisés dans les avions, en particulier dans les caissons de voilure et le long du fuselage.

Les efforts en compression de la plaque se traduisent par des efforts en compression longitudinale sur les raidisseurs en I, qui peuvent alors flamber, c'est à dire fléchir et se déformer dans une direction perpendiculaire à la force appliquée. Le flambage se produit d'autant plus facilement que la poutre est longue et de faible section.

Afin de tenir la charge maximale imposée durant le vol de l'avion, il suffit de ¡¡sur-dimensionner¿¿ les raidisseurs. Cependant, le poids de l'avion est un critère de conception

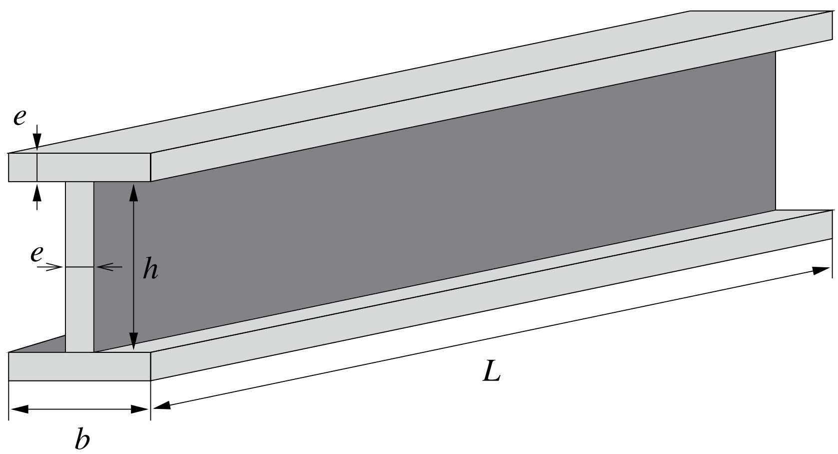

FIG. 1 – Schéma d'un raidisseur en I

primordial, si bien que la masse des raidisseurs doit être minimale. Le but de ce problème est donc de déterminer la forme des raidisseurs de masse minimale sous des contraintes de géométrie et de flambage. Les raidisseurs recherchés peuvent être de simples âmes minces, c'est à dire que $b \geqslant 0$ alors que $e > 0$ et $h > 0$ (existence physique des raidisseurs). La longueur des raidisseurs est fixée à $L > 0$, et la masse volumique du matériau est constante.

2 Résistance au flambage global

La contrainte de flambage global est que la charge extrême P_{max} **n'excède pas** la charge d'Euler donnée par la formule :

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad \text{où :}$$

- $E > 0$ est le module de Young du matériau considéré
- I est le moment d'inertie de la section du raidisseur par rapport à l'axe Oy (O est le centre de gravité de la section du raidisseur), donné par la formule :

$$I = e\frac{h^2}{2}\left(\frac{h}{6} + b\right)$$

Autrement dit, la structure de l'avion doit supporter au moins la charge P_{max}.

Questions :

1. Ecrire le problème d'optimisation sous la forme d'un problème (P1) de minimisation de surface sous contraintes inégalité.
2. Montrer que ce problème n'a pas de solution.

Tournez la page.

3 Contrainte de fabrication

En réalité, il est impossible de fabriquer un raidisseur d'épaisseur infiniment petite. On note (P2) le problème (P1) augmenté de la contrainte de fabrication : $e \geqslant e_{min}$.

Questions :

1. Montrer que la solution du problème (P2) est :

$$\begin{cases} e = e_{min} \\ h = \left(\dfrac{12 P_{max} L^2}{\pi^2 e_{min} E}\right)^{\frac{1}{3}} \\ b = 0 \end{cases}$$

Vous utiliserez, **sans la démontrer**, la condition suffisante du deuxième ordre, intermédiaire entre les deux conditions du deuxième ordre vues en cours :

> *Soit $\hat{x} \in \Omega$ où les contraintes sont qualifiées. S'il existe $\hat{\mu} \in \mathbb{R}_+^l$ tel que :*
> - $\dfrac{\partial L}{\partial x}(\hat{x}, \hat{\mu}) = 0$
> - $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant l\ ,\ \hat{\mu}_i h_i(\hat{x}) = 0$
> - $v^T \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{\mu}) v > 0$ *pour tout* $v \in \mathbb{R}_*^n$ *tel que*
>
> $$\begin{cases} v^T \dfrac{\partial h_i}{\partial x}(\hat{x}) = 0 \text{ pour tout } i \in A(\hat{x}) \text{ tel que } \hat{\mu}_i > 0 \\ v^T \dfrac{\partial h_i}{\partial x}(\hat{x}) \leqslant 0 \text{ pour tout } i \in A(\hat{x}) \text{ tel que } \hat{\mu}_i = 0 \end{cases}$$
>
> *Alors $\hat{x}$ est une solution locale stricte de $(\mathcal{P}_\Omega)$.*

2. Le flambage local ne survient pas tant que la contrainte suivante est respectée :

$$\frac{P_{max}}{S} \leq K \left(\frac{e}{h}\right)^2 \qquad \text{où :}$$

- $K > 0$ est une constante qui dépend de la géométrie du raidisseur
- S est la surface du raidisseur dans une coupe transversale (cf. figure 1)

Donner une condition nécessaire sur les données du problème pour que la solution précédente n'entraîne pas de flambage local.

4 Résistance au flambage local

L'âme mince, solution du problème (P2), ne tient pas compte de la contrainte de flambage local précédemment donnée, si bien qu'on ne retrouve pas le raidisseur en I, pourtant couramment utilisé en résistance des matériaux. On note (P3) le problème (P2) augmenté de la contrainte de flambage local. On suppose que $b > 0$ et $e > 0$ (e n'est plus contraint par e_{min}).

Questions :

1. Ecrire le problème (P3) dans le système de variables (α, S_a, S_t) où :
   - $\alpha = \dfrac{e}{h}$ est la variable d'aspect du raidisseur
   - $S_a = eh$ est la surface de l'âme du raidisseur
   - $S_t = eb$ est la surface de chaque talon du raidisseur

   Calculer les dimensions optimales du raidisseur en I solution du problème (P3).
2. Comparer la masse du raidisseur optimal en I et du raidisseur âme mince optimal **pour le problème (P3)**. Commenter.