Examen de rappel d'Optimisation Non Linéaire

ENAC – 1er Septembre 2005

1 Exercice : Qualification des contraintes et optimisation

Soit le domaine $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \leqslant 0 \text{ et } x - y \leqslant 0\}$.

1. Montrer que les contraintes sont qualifiées sur $\Omega \setminus (0, 0)$.
2. Déterminer graphiquement le cône des directions admissibles en $(0, 0)$.
3. En déduire que les contraintes ne sont pas qualifiées en $(0, 0)$.
4. Calculer le point de Ω le plus proche du point $(1, 1)$ en utilisant le lagrangien.
   Remarque : les théorèmes du lagrangien ne s'appliquent uniquement que sur l'ensemble des points où les contraintes sont qualifiées.
5. Donner une autre formulation du domaine Ω. Le problème précédent aurait-il été plus simple à résoudre avec cette nouvelle formulation ?

2 Problème : Minimisation de fonction quadratique dans une boule

2.1 Caractérisation des solutions

On s'intéresse au problème d'optimisation :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & q(s) = \frac{1}{2}s^T B s \ + g^T s \ , \ s \in \mathbb{R}^n \\ \text{tel que} & \|s\|_2 \leqslant \Delta \end{array} \tag{1}$$

où $B \in \mathbb{S}^n$ (ensemble des matrices symmétriques de taille n), $g \in \mathbb{R}^n$, et $\Delta > 0$.
Dans la suite I_n désigne la matrice identité de taille n.

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Toute solution globale } s^* \text{ du problème (1) vérifie} \\ \qquad (B + \lambda^* I_n)\, s^* \ = \ -g, \qquad \lambda^* \left(\|s^*\|_2 - \Delta\right) = 0. \\ \text{où } \lambda^* \geqslant 0 \text{ et } \ B + \lambda^* I_n \text{ est une matrice semi-définie positive} \end{array}}$$

On rappelle que le problème (1), en tant que problème d'optimisation sur un compact, possède toujours une solution. Soit donc s^* une de ces solutions.

1. Montrer qu'il existe $\lambda^* \geqslant 0$ tel que $(B + \lambda^* I_n)\, s^* \ = \ -g$ et $\lambda^* \left(\|s^*\|_2 - \Delta\right) = 0$.
2. Montrer que si $\|s^*\|_2 < \Delta$, alors $(B + \lambda^* I_n)$ est semi-définie positive.

3. Montrer que si $\|s^*\|_2 = \Delta$ et $\lambda^* = 0$, alors $(B + \lambda^* I_n)$ est semi-définie positive.

4. On considère dans la question 4. le dernier cas où $\|s^*\|_2 = \Delta$ et $\lambda^* > 0$.

   (a) Quel est le signe de $v^T\ (B + \lambda^* I_n)\ v$ pour $v \in \mathcal{N}_+ = \{v,\ s^{*T}\ v\ =\ 0\}$?

   (b) Dans toute la question (b), on choisit v tel que $s^{*T}\ v\ \neq\ 0$. Soit alors s un point de la "frontière" $\delta R = \{s,\ \|s\|_2\ =\ \Delta\}$, et soit $\omega\ =\ s - s^*$.

      i. Montrer que $-\omega^T s^*$ peut s'écrire $k\,\omega^T \omega$.

      ii. Etablir que $q(s) - q(s^*)\ =\ \frac{1}{2}\omega^T\ (B + \lambda^* I_n)\ \omega$.

      iii. Conclure en utilisant $s = s^* - 2\frac{s^{*T}\ v}{v^T\ v}v$.

2.2 Ajout de contraintes égalités linéaires

Dans cette partie on ajoute m contraintes linéaires égalités, $m\ <\ n$, pour former le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \frac{1}{2}s^T Bs\ + g^T s,\ s \in \mathbb{R}^n \\ \text{tel que} & \|s\|_2 \leqslant \Delta \\ & As\ =\ b \end{array} \tag{2}$$

A est une matrice $m \times n$ de rang maximum en lignes ($\text{rang}(A)\ =\ m$) et b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
On note $\text{Ker}(A)$ le noyau de A, $\text{Im}(A^T)$ l'image de A^T, et $\left(\text{Im}(A^T)\right)^\perp$ l'orthogonal de $\text{Im}(A^T)$.
n_Z désigne la dimension de $\text{Ker}(A)$.

1. Montrer que $\left(\text{Im}(A^T)\right)^\perp = \text{Ker}(A)$

2. En déduire que tout vecteur s de $\mathbb{R}^n$ peut se décomposer selon $s\ =\ A^T s_1\ +\ Z s_2$, où les colonnes de Z forment une base orthonormale du noyau de A.

3. Que vaut le produit $A\,Z$?

4. Montrer que $A\,A^T$ est inversible.

5. Calculer la solution du problème (2) qui n'active pas la contrainte inégalité ($\|s\|_2 < 0$). Donner une condition suffisante pour que cette solution existe.

6. Montrer que (2) peut se ramener à

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \frac{1}{2}s_2^T \tilde{B} s_2\ + \tilde{g}^T s_2,\ s_2 \in \mathbb{R}^{n_Z} \\ \text{tel que} & \|s_2\|_2 \leqslant \tilde{\Delta}, \end{array} \tag{3}$$

   où l'on définira $\tilde{B}, \tilde{g}, \tilde{\Delta}$ en fonction des données du problème.
   Quelle hypothèse faut-il faire sur $\|A^T s_1\|_2$?